Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1A

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x,y) = g(2x - y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Lösning:

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot g'(2x - y^2) \cdot 2 + g'(2x - y^2) \cdot (-2y) = 0.$$

2. *Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 - xyz + yz^2 - z^3 = 0$ i punkten $(1,1,1)$.*

Lösning: $\operatorname{grad}(x^3 - xyz + yz^2 - z^3) = (3x^2 - yz, -xz + z^2, -xy + 2yz - 3z^2)$ blir i punkten $(1,1,1)$ lika med $(2,0,-2) = 2(1,0,-1)$. Så i denna punkt får vi normalvektorn $\boldsymbol{n} = (1,0,-1)$, som sedan ger tangentplanet

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - (1,1,1)) = (1,0,-1) \cdot (x-1, y-1, z-1) \\ &= x - 1 - z + 1 = x - z, \end{aligned}$$

det vill säga $x - z = 0$.

3. *Inför polära koordinater i högra halvplanet* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ *genom*

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$

där $0 < r < \infty$ *och* $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. *Härigenom kan en funktion* $f \colon H \to \mathbb{R}$ *uppfattas antingen som en funktion av* x *och* y *eller som en funktion av* r *och* ϕ. *Visa att*

$$r\,\frac{\partial f}{\partial r} = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} r\,\frac{\partial f}{\partial r} &= r\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = r\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\cos\phi + r\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\sin\phi \\ &= x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1B

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt $g(t)$ vara en deriverbar envariabelsfunktion. Visa att tvåvariabelsfunktionen $f(x,y) = g(x^2y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen*
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Lösning:
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot g'(x^2y^2) \cdot 2xy^2 - y \cdot g'(x^2y^2) \cdot (2x^2y) = 0.$$

2. *Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan* $(x+1)(y+2)(z+1) = 18$ *i punkten* $(2,1,1)$.

Lösning: $\operatorname{grad}((x+1)(y+2)(z+1)) = ((y+2)(z+1),(x+1)(z+1),(x+1)(y+2))$ blir i punkten $(2,1,1)$ lika med $(6,6,9) = 3(2,2,3)$. Så i denna punkt får vi normalvektorn $\boldsymbol{n} = (2,2,3)$, som sedan ger tangentplanet
$$\begin{aligned}0 &= \boldsymbol{n}\boldsymbol{\cdot}((x,y,z)-(2,1,1)) = (2,2,3)\boldsymbol{\cdot}(x-2,y-1,z-1)\\ &= 2(x-2)+2(y-1)+3(z-1) = 2x+2y+3z-9,\end{aligned}$$
det vill säga $2x+2y+3z = 9$.

3. *Inför polära koordinater i högra halvplanet* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0\}$ *genom*

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \end{cases}$$

där $0 < r < \infty$ *och* $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. *Härigenom kan en funktion* $f\colon H \to \mathbb{R}$ *uppfattas antingen som en funktion av* x *och* y *eller som en funktion av* r *och* ϕ. *Visa att*

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\,\sin\phi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\,\cos\phi \\ &= -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2A

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 2 poäng.
- För godkänt krävs minst 3 poäng sammanlagt.

1. *Bestäm* alla *stationära punkter för funktionen*

$$f(x,y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2. \qquad \text{(2p)}$$

Lösning: De stationära punkterna fås ur systemet $f'_x = f'_y = 0$. Här får man

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 8x + 2y = 0 & (1) \\ f'_y = 2x - 2y = 0 & (2). \end{cases}$$

(2) ger att $y = x$; detta insatt i (1) ger

$$6x^2 - 8x + 2x = 0 \iff 6x(x-1) = 0 \iff x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \implies y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(1,1)$.

2. *Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller ...).* (2p)

Lösning: Ytterligare deriveringar ger

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x - 8, \\ f''_{xy} &= 2, \\ f''_{yy} &= -2, \\ f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 &= -24\,x + 12. \end{aligned}$$

I $(0,0)$ är $f''_{xx} = -8 < 0$ och $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 12 > 0$, vilket visar att f har ett *lokalt maximum* i $(0,0)$. I $(1,1)$ är $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -12 < 0$, varför f har en *sadelpunkt* i $(1,1)$.

3. *Visa först att man kan lösa ut y som funktion av x (det vill säga kan skriva $y = y(x)$) ur ekvationen*

$$2y - \sin y = x,$$

nära punkten $(0, 0)$ *på denna kurva. Beräkna sedan* $\frac{dy}{dx}$ *då* $x = 0$. (2p)

Lösning: Om $F(x, y) = 2y - \sin y - x$, så är villkoret för att man ska kunna lösa ut y lokalt att

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Här fås att

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 - \cos y,$$

som alltid är $\geq 1 > 0$, så man kan lösa ut y lokalt kring varje punkt och få att $F(x, y) = 0 \iff y = y(x)$.

Insättning av $y = y(x)$ ger att $F(x, y(x)) = 0$ för *alla* x. d/dx på $2y(x) - \sin y(x) - x = 0$ visar sedan att $2y' - \cos y \cdot y' - 1 = 0$, det vill säga

$$y'(x) = \frac{1}{2 - \cos y}.$$

Speciellt ser vi att då $x = y = 0$, så är $y' = 1$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2B

i 5B1147 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 2 poäng.
- För godkänt krävs minst 3 poäng sammanlagt.

1. *Bestäm* alla *stationära punkter för funktionen*

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2. \qquad \text{(2p)}$$

Lösning: De stationära punkterna fås ur systemet $f'_x = f'_y = 0$. Här får man

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 4x + y = 0 & (1) \\ f'_y = x + 2y = 0 & (2). \end{cases}$$

(2) ger att $x = -2y$; detta insatt i (1) ger

$$12y^2 - 8y + y = 0 \iff 12y\left(y - \frac{7}{12}\right) = 0 \iff$$
$$y = \begin{cases} 0 \\ 7/12 \end{cases} \implies x = \begin{cases} 0 \\ -7/6 \end{cases}.$$

Så de stationära punkterna är $(0, 0)$ och $(-7/6, 7/12)$.

2. *Bestäm karaktären för de stationära punkterna i föregående uppgift (det vill säga, lokalt maximum eller lokalt minimum eller sadelpunkt eller ...).* (2p)

Lösning: Ytterligare deriveringar ger

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= 6x + 4, \\
f''_{xy} &= 1, \\
f''_{yy} &= 2, \\
f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 &= 12\,x + 7.
\end{aligned}$$

I $(0,0)$ är $f''_{xx} = 4 > 0$ och $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 7 > 0$, vilket visar att f har ett *lokalt minimum* i $(0,0)$. I $(-7/6, 7/12)$ är $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -7 < 0$, varför f har en *sadelpunkt* i $(-7/6, 7/12)$.

3. *Visa först att man kan lösa ut y som funktion av x (det vill säga kan skriva $y = y(x)$) ur ekvationen*

$$x + y + \sin xy = 0,$$

nära punkten $(0,0)$ *på denna kurva. Beräkna sedan* $\frac{dy}{dx}$ *då* $x = 0$. (2p)

Lösning: Om $F(x,y) = x + y + \sin xy$, så är villkoret för att man ska kunna lösa ut y lokalt att

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Här fås att

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \cos xy \cdot x,$$

som är $= 1 > 0$ då $x = y = 0$, så man kan lösa ut y lokalt kring $(0,0)$ och få att $F(x,y) = 0 \iff y = y(x)$.

Insättning av $y = y(x)$ ger att $F(x, y(x)) = 0$ för *alla* x. d/dx på $x + y + \sin xy = 0$ visar sedan att $1 + y' + \cos xy \cdot (y + xy') = 0$, det vill säga

$$y'(x) = -\frac{1 + y \cdot \cos xy}{1 + x \cdot \cos xy}.$$

Speciellt ser vi att då $x = y = 0$, så är $y' = -1$.

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 3A

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt D vara det ändliga område i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$.*

   (a) *Skissera D.* (1p)

   (b) *Beräkna integralen*
   $$I = \iint_D xy\,dxdy. \qquad (2p)$$

   Lösning:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=1} x \left(\int_{y=x^2}^{y=x} y\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5)\,dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

2. *Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0\}$. Beräkna integralen*

$$I = \iint_D y\,dxdy.$$

Lösning:

$$I = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{\pi} r \sin\phi \cdot r \, dr \, d\phi = \int_{0}^{1} r^2 \, dr \cdot \int_{0}^{\pi} \sin\phi \, d\phi$$
$$= \frac{1}{3} \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

3. *Låt $a > 0$. Beräkna arean av den del av sadelytan*

$$z = 7 - x^2 + y^2$$

som ligger ovanför cirkelskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$. (3p)

Lösning:

$$\text{Arean} = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, drd\phi$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{\pi}{6} \left((1 + 4a^2)^{3/2} - 1 \right).$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 3B

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Låt D vara det ändliga område i xy-planet som begränsas av kurvorna $x = 1$, $x = 3$, $xy = 1$ och $xy = 2$.*

   (a) *Skissera D.* (1p)

   (b) *Beräkna integralen*

$$I = \iint_D xe^{xy}\,dxdy. \qquad (2p)$$

Lösning:

$$I = \int_{x=1}^{x=3}\left(\int_{y=1/x}^{y=2/x} xe^{xy}\,dy\right)dx = \int_{x=1}^{x=3}\left([e^{xy}]_{y=1/x}^{y=2/x}\right)dx$$
$$= \int_1^3 (e^2 - e)\,dx = 2(e^2 - e).$$

2. *Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1$ och $x \geq 0\}$. Beräkna integralen*

$$I = \iint_D x\,dxdy.$$

Lösning:

$$I = \int_{r=0}^{1}\int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\phi \cdot r\,dr\,d\phi = \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\,d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot[\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

3. *Låt $a > 0$. Beräkna arean av den del av sadelytan*

$$z = 3 + x^2 - y^2$$

som ligger ovanför cirkelskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
\text{Arean} &= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sqrt{1+4r^2}\, r\, drd\phi \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{\pi}{6} \left((1 + 4a^2)^{3/2} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 4A

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Bestäm de största och minsta värdena av funktionen*

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

på den slutna enhetsskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 2x - 1 \iff x = 1/2, \\ 0 = \partial f/\partial y = 4y \iff y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ punkten $(1/2,\, 0)$, där $f = 1/4 - 1/2 = -1/4$.

Randen: Där är $y^2 = 1 - x^2$, så $f = x^2 + 2 - 2x^2 - x = -x^2 - x + 2 = g(x)$, säg, med $-1 \leq x \leq 1$. $0 = g'(x) = -2x - 1 \Longrightarrow x = -1/2$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värde på randen:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1 + 1 + 2 = 2, \\ g(-1/2) &= -1/4 + 1/2 + 2 = 2 + 1/4, \\ g(1) &= -1 - 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

SVAR: Största värdet $= 2 + 1/4$, minsta $= -1/4$.

2. *Vilken är den maximala produkten av tre positiva tal med summan lika med 6? Förklara!*

   Lösning: Vi ska maximera $f(x, y, z) = xyz$ under bivillkoret att $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och $x + y + z = 6$. Lagrangesystemet blir då

$$\begin{cases} yz = \lambda, \\ xz = \lambda, \\ xy = \lambda, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

   Första ekvationen säger att $\lambda = yz$; detta insatt i den andra ger $xz = yz \iff (x - y)z = 0 \iff y = x$, eftersom $z > 0$. $y = x$ och $\lambda = xz$ insatta i den tredje ekvationen ger $x^2 = xz \iff x(x - z) = 0 \iff z = x$. Med $y = z = x$ övergår den fjärde ekvationen i $3x = 6 \iff x = 2$. Så vi får punkten $(2, 2, 2)$, där $f = f_{\max} = 8$.

3. *Beräkna*

$$I = \int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{(x - y)^2}$$

   där γ *är den del av enhetscirkeln som går från* $(0, -1)$ *till* $(1, 0)$ *i den fjärde kvadranten.*

   Lösning: $I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där

$$P = \frac{-y}{(x - y)^2} \quad \text{och} \quad Q = \frac{x}{(x - y)^2}.$$

   RÄTTFRAMMA RÄKNINGAR visar att $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$, så vi kan byta väg (så länge som vi håller oss borta från den elaka linjen $x - y = 0$): låt oss väja $y = x - 1$, där x löper från 0 till 1. På denna är $x - y = 1$ och $dy = dx$, så den sökta integralen reduceras till

$$I = \int_{x=0}^{1} \frac{x\,dx - (x - 1)\,dx}{1^2} = \int_0^1 dx = 1.$$

Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 4B

i 5B1148 Flervariabelanalys för E, vt 2007.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. *Bestäm de största och minsta värdena som funktionen*

$$f(x, y) = x^2 - 2x - 2y$$

antar på den slutna enhetskvadraten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1$ *och* $0 \leq y \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:* $\partial f/\partial y = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ finns inga!

Randen består av 4 räta linjestycken, som får undersökas var för sig.

(1) $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f = x^2 - 2x$; derivatan $2x - 2 = 0$ ger $x = 1$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värden:

$$f(0, 0) = 0,$$
$$f(1, 0) = 1 - 2 = -1.$$

(2) $x = 1$ och $0 \leq y \leq 1 \Longrightarrow f = -1 - 2y$, som är *avtagande*. Så största värdet är $f(1, 0) = -1$, och det minsta är $f(1, 1) = -3$.

(3): $y = 1$ och $0 \leq x \leq 1$, respektive (4): $x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$, behandlas på samma sätt.

SVAR: Största värdet är 0 i $(0, 0)$, minsta är -3 i $(1, 1)$.

2. *Vilken är den minimala summan av tre positiva tal med produkten lika med 8? Förklara!*

   Lösning: Vi ska minimera $f(x,y,z) = x+y+z$ under bivillkoret att $x>0$, $y>0$, $z>0$ och $xyz-8=0$. Lagrangesystemet blir

$$\begin{cases} 1 = \lambda\cdot yz & (1), \\ 1 = \lambda\cdot xz & (2), \\ 1 = \lambda\cdot xy & (3), \\ xyz = 8 & (4). \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \implies 1 = \frac{y}{x}, \text{ det vill säga } y = x;$$
$$\frac{(1)}{(3)} \implies 1 = \frac{z}{x}, \text{ det vill säga } z = x;$$

   detta insatt i (4) ger $x^3 = 8 \iff x = 2$, så att $f_{\min} = 2+2+2 = 6$.

3. *Beräkna*

$$I = \oint_\gamma (e^x\cos x - y)\,dx + (2xy - \arctan(y^2))\,dy,$$

   där γ *är den positivt orienterade randen till området* $D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2\colon x^2\le y\le 1\}$.

   Lösning: $I = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där

$$P = e^x\cos x - y \quad \text{och} \quad Q = 2xy - \arctan(y^2).$$

   Därmed blir $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2y+1$. Green säger då att

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2y+1)\,dxdy = \int_{x=-1}^{x=1} \big[y^2+y\big]_{y=x^2}^{y=1}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2-x^4-x^2)\,dx = 2\int_0^1 (2-x^4-x^2)\,dx \\ &= 2\left[2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(2-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) \\ &= \cdots = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$