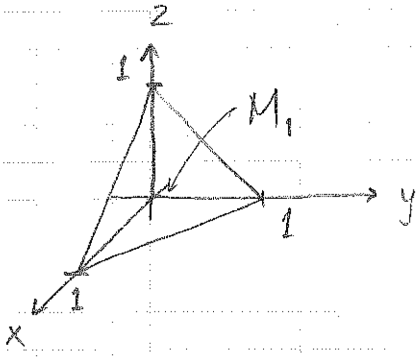
1.10. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^3$:

Ö1, E

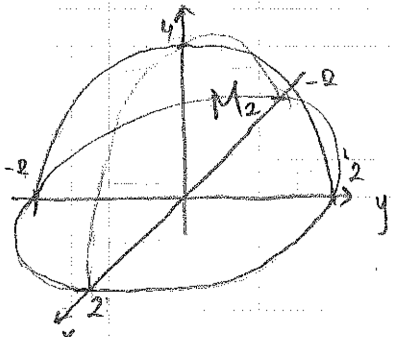
a) $M_1 = \{(x,y,z);\ x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$



{Håll till exempel en av variablerna konstant (=0) för att få randvärden

$x+y \le 1,\quad x+z \le 1,\quad y+z \le 1$

b) $M_2 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$

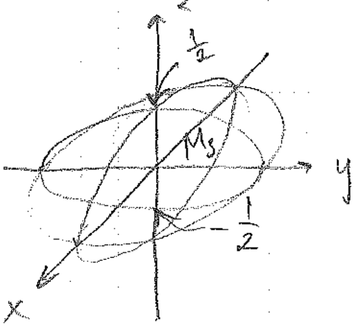


{Håll $z=0 \Rightarrow x^2+y^2 \le 4$, cirkel med radie 2. (centrerad i origo)

{P.s.s. $x, y = 0 \Rightarrow$ cirklar i xz, yz-planen

Vi får en halv sfär!

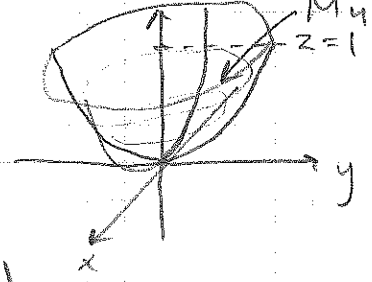
c) $M_3 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+4z^2 \le 1\}$



Ellipsoid centrerad i origo.

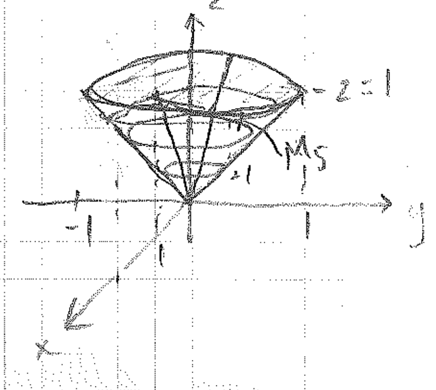
{$x^2+4z^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2+(2z)^2 \le 1$, ellips!

d) $M_4 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2 \le z \le 1\}$



{Paraboloid centrerad kring z-axeln (alla värden sådana att $z \le 1$ är med i mängden)

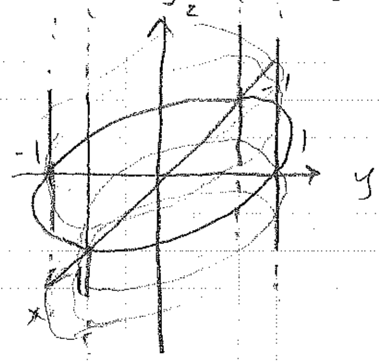
e) $M_5 = \{(x,y,z);\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$



Håll t.ex. $x/y = 0 \Rightarrow z \ge \sqrt{x^2} = |x|$

Kon

f) $M_6 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2 \leq 1\}$.



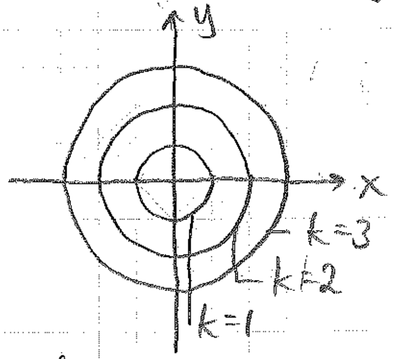
Cylinder, centrerad runt z-axeln.

{Tänk i $\mathbb{R}^2$: $x^2+y^2 \leq 1$ är enhetscirkeln!}

1.14 Rita nivåkurvorna $\{(x,y);\ f(x,y)=k\}$ till

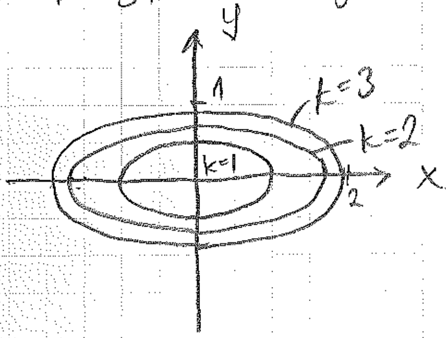
Ö1,E

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $k=1,2,3$



b) $f(x,y)=x^2+4y^2$, $k=1,2,3$

$x^2+(2y)^2$ Ellipser

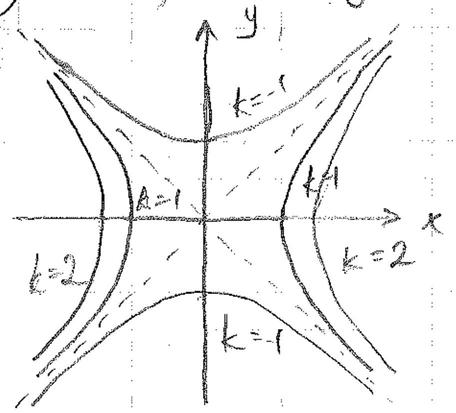


c) $f(x,y)=x^2-y^2$, $k=-1,1,2$

$k=-1:\ x^2-y^2=-1 \Rightarrow y^2=x^2+1$

$k=1:\ x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2=y^2+1$

$k=2:\ x^2=y^2+2$



1.19 $z-\sqrt{1-x^2-y^2}=0 \Leftrightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$\Rightarrow z^2=1-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$, Enhetssfären

men $z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z\geq 0$, alltså har vi endast den övre (norra) halvsfären.

$z-\sqrt{1-x^2-y^2}=1 \Leftrightarrow (z-1)-\sqrt{1-x^2-y^2}=0$

$\Leftrightarrow z-1=\sqrt{1-x^2-y^2}$ Halvsfär med centrum i $(0,0,1)$

1.29 Avgör om följande funktioner kan utvidgas så att de blir kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Ö1, E

f är redan kontinuerlig överallt förutom i origo, vi ser efter om f har ett gränsvärde där.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left\{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2\right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$$

(Standardgränsvärde $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$)

Så f är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ om $f(0,0) = 1$!

(Kontinuerlig: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$)

2.1c. Beräkna de partiella derivatorna för

a) $f(x,y) = x + x^3y + x^2y^3 + y^5$

Vi är intresserade av:

$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = 1 + 3x^2y + 2xy^3$ och

$f'_y(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + 5y^4$

b) $f(x,y) = (xy^2+1)^5$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 5(xy^2+1)^4 \cdot y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5(xy^2+1)^4 \cdot 2yx$

2.4 Beräkna $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$ om $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz} \cdot (3x^2-3yz) = \frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3x^3-3xyz+3y^3-3xyz+3z^3-3xyz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

$$= 3\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x^3+y^3+z^3-3xyz} = \underline{\underline{3}}$$

2.81 Visa genom direkt användning av definitionen att följande funktioner är differentierbara i angivna punkter: Ö2.E

d) $f(x,y) = \sin(x+y)$ i $(1,1)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Def 2, s. 53:} \\ f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = A_1h_1 + \ldots + A_nh_n + |\bar{h}|\rho(\bar{h}) \\ \text{och } \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \rho(\bar{h}) = 0 \quad \Rightarrow f \text{ är differentierbar.} \end{array}\right.$$

Låt $\bar{a} = (1,1)$ och $\bar{h} = (h_1, h_2)$ i def 2

$f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = f((1,1)+(h_1,h_2)) - f(1,1) =$

$= \sin((1+h_1)+(1+h_2)) - \sin(1+1) =$

$= \sin(2+h_1+h_2) - \sin(2) = \sin(2)\cos(h_1+h_2) + \cos(2)\sin(h_1+h_2) -$

$- \sin(2) = \sin 2 \cos h_1 \cos h_2 - \sin 2 \sin h_1 \sin h_2 +$

$+ \cos 2 \sin h_1 \cos h_2 + \cos 2 \cos h_1 \sin h_2 - \sin 2 =$

$= \{$Linearisera, för små h $(|h|<1)$: $\sin h \approx h$, $\cos h \approx 1\} =$

$= \sin 2 \cdot 1 \cdot 1 - \sin 2 \cdot h_1 \cdot h_2 + \cos 2 \cdot h_1 \cdot 1 + \cos 2 \cdot 1 \cdot h_2 - \sin 2 =$

$= \cos 2 \cdot h_1 + \cos 2 \cdot h_2 - \sin 2 \cdot h_1 \cdot h_2 =$

$= \cos 2 \cdot h_1 + \cos 2\, h_2 + |\bar{h}|\rho(\bar{h})$

där $\rho(\bar{h}) = \begin{cases} \dfrac{-\sin 2\, h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & (h_1,h_2) \neq (0,0) \\ 0 & (h_1,h_2) = (0,0) \end{cases}$

Vi ser att $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \rho(\bar{h}) = 0$ (Se t.ex. 1.24c)

Så med $A_1 = A_2 = \cos 2$ är f differentierbar.

Enklare använder vi sats 2.3 s. 56, då $f \in C^1$ är f differentierbar.

2.10

Vid bestämning av tyngdkraftens acc. g genom försök med fritt fall mäter man falltiden t sekunder och fallsträckan s meter. Därvid gäller

$$g = 2st^{-2} \text{ m/s}^2$$

Vid ett försök fick man

$$s = 2 \pm 0.01, \quad t = 0.63 \pm 0.01.$$

Vilket värde på g erhålls och med vilken noggrannhet?

$$g = 2st^{-2} = 2 \cdot 2 \cdot 0.63^{-2} \approx 10.1$$

$$|\Delta g| = \left|\frac{\partial g}{\partial s}\right||\Delta s| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right||\Delta t| = \left|2t^{-2}\Big|_{t=0.63}\right| \cdot 0.01 + \left|-2 \cdot 2st^{-3}\Big|_{\substack{t=0.63\\ s=2}}\right| \cdot 0.01 =$$

$$= 0.01\left(2 \cdot 0.63^{-2} + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0.63^{-3}\right) \approx 0.4$$

Vi använder felfortplantningsformeln s. 59

Svar: $g = 10.1 \pm 0.4$

2.13

Betrakta funktionen $f(x,y) = e^{x^2 y} + xy$ och den sammansatta funktionen $u(t) = f(\cos t, \sin t)$

a) Bestäm $u(t)$ explicit och beräkna därefter $u'(t)$

$$u(t) = f(\cos t, \sin t) = e^{\cos^2 t \sin t} + \cos t \sin t$$

$$u'(t) = e^{\cos^2 t \sin t}(\cos^2 t \sin t)' + (\cos t \sin t)' =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) + (-\sin^2 t + \cos^2 t) =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(\cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t)) + \cos^2 t - \sin^2 t =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(\cos t(\cos^2 t - 2(1 - \cos^2 t))) + \cos 2t =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(\cos t(\cos^2 t - 2 + 2\cos^2 t)) + \cos 2t =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(3\cos^3 t - 2\cos t) + \cos 2t$$

b) Beräkna $u'(t)$ med kedjeregeln

$$u'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = (e^{x^2 y} \cdot 2xy + y)(-\sin t) + (e^{x^2 y} \cdot x^2 + x)\cos t =$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}[(2\cos t \sin t)(-\sin t) + \cos^2 t \cdot \cos t] + \sin t(-\sin t) +$$

$$+ \cos t \cdot \cos t = e^{\cos^2 t \sin t}(\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t) + \cos 2t = \ldots$$

$$= e^{\cos^2 t \sin t}(3\cos^3 t - 2\cos t) + \cos 2t$$

2.54 För ett visst svängande trumskinn, givet av $x^2+y^2 \le R^2$ gäller att svängningsamplituden $u(x,y)$ satisfierar Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c^2u=0\ ,\quad x^2+y^2\le R^2$$

där c är en reell konstant. Det finns en lösning till ekvationen på formen $u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$ där f är en funktion av en variabel. Visa att denna funktion f satisfierar diff.ekv.

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+c^2f(r)=0\ ,\quad 0<r<R.$$

Vi testar att transformera $u_{xx}+u_{yy}+c^2u=0$.

Låt $u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow u'_x=f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot(\sqrt{x^2+y^2})'=\dfrac{xf'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow u'_y=\frac{yf'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$u''_{xx}=\frac{\left(xf'(\sqrt{x^2+y^2})\right)'\sqrt{x^2+y^2}-xf'(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})'}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})+xf''(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{xf'(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow u''_{yy}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})+yf''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{yf'(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[2f'(\sqrt{x^2+y^2})+\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}f''(\sqrt{x^2+y^2})\right]-\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=\{\text{Polära koord: } x^2+y^2=r^2\}=\frac{1}{r}\left[2f'(r)+rf''(r)\right]-\frac{1}{r}f'(r)=$$

$$=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$

Så $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c^2u \overset{①}{=} f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)+c^2f(r)\overset{②}{=}0$ är uppfylld då $u=f$ uppfyller ekvation ① = ②.

2.57 Lös PDE'n $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-6\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$

genom att göra variabelbytet $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$

och välja α och β på lämpligt sätt

Sätt $f=f(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial f}{\partial u}+\beta\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=$$

$$=\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

PDE'n blir nu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 6\left(\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \right.$$

$$\left. + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+\alpha-6\alpha^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (1+\beta-6\beta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (2+\alpha+\beta-12\alpha\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1$$

Kan α och β väljas så att $1+\alpha-6\alpha^2=0$?

$$1+x-6x^2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}}=$$

$$=\frac{1}{12}\pm\frac{5}{12} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/3 \end{array}$$

Vi vill ha $\alpha \neq \beta$, så välj t.ex. $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/3$.
Då blir PDE'n:

$$\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-12\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{12}{6}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{6}{25} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{6}{25}v + g(u) \Rightarrow f(u,v) = \frac{6}{25}uv + G(u) + H(v)$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = \frac{6}{25}\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(x-\frac{1}{3}y\right) + G\left(x+\frac{1}{2}y\right) + H\left(x-\frac{1}{3}y\right)$$

där F och G ligger i C^2.