KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Funktionen
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x,y) \neq (0,0)$. Kan man definiera $f(x,y)$ i punkten $(0,0)$ så att $f(x,y)$ blir kontinuerlig där? I så fall, förklara HUR!

   Lösning: $(x,y) \to (0,0) \iff t = x^2+y^2 \to 0 \Longrightarrow$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
Så $f(x,y) \to 1$ då $(x,y) \to (0,0)$ oavsett längs vilken väg detta sker. Detta betyder att $f(x,y)$ blir kontinuerlig i $(0,0)$ om man sätter $f(0,0) = 1$.

2. Låt $w = f(x,y,z) = xy^2z^3$, och sätt sedan $x = \cos t$, $y = e^t$ och $z = \ln(t+2)$ så att w blir en funktion av t. Beräkna
$$\frac{dw}{dt}(0).$$

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\\ &= y^2z^3\cdot(-\sin t)+2xyz^3\cdot e^t+3xy^2z^2\cdot\frac{1}{t+2}.\end{aligned}$$

Då $t=0$ är $x=1$, $y=1$ och $z=\ln 2$, varför

$$\frac{dw}{dt}(0)=0+2\cdot(\ln 2)^3+\frac{3}{2}\cdot(\ln 2)^2.$$

3. Låt funktionen $z=f(x,y)$ vara given. Genom att införa polära koordinater definierade av $x=r\cos\phi$ och $y=r\sin\phi$ kan z även uppfattas som en funktion av r och ϕ. Visa att

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2.$$

Lösning:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\phi+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\phi \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}=-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot r\sin\phi+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\phi\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\phi+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\phi\sin\phi+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\phi$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\phi-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\phi\sin\phi+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\phi$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$