KTH Matematik
Olle Stormark

# Lösning till kontrollskrivning 1B

## i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Funktionen
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x, y) \neq (0, 0)$, och är uppenbarligen lika med 0 längs koordinataxlarna. Blir $f(x, y)$ kontinuerlig om man sätter $f(0, 0) = 0$? FÖRKLARA!

   **Lösning:** Längs linjen $y = x$ till exempel är $f = 1/2$, så $f(x, y) \to 1/2 \neq 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$ längs denna linje. Så $f(x, y)$ kan OMÖJLIGT göras kontinuerlig i $(0, 0)$.

2. Låt $z = x^2 y$, och sätt $x = u^2 + v^2$, $y = \cos(uv)$, så att $z$ blir en funktion av $u$ och $v$. Beräkna $\partial z/\partial u$ som en funktion av $u$ och $v$.

   **Lösning:**
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2xy \cdot 2u + x^2 \cdot (-\sin(uv) \cdot v) \\ &= 2(u^2 + v^2) \cdot \cos(uv) \cdot 2u - (u^2 + v^2)^2 \cdot v \cdot \sin(uv) \\ &= 4u \cdot (u^2 + v^2) \cdot \cos(uv) - v \cdot (u^2 + v^2)^2 \cdot \sin(uv).\end{aligned}$$

3. Linjen $(x, y, z) = t \cdot (1, 1, 1)$ (där $-\infty < t < \infty$) skär ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ i en punkt $\boldsymbol{p}$ i första oktanten $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Bestäm den minsta vinkeln mellan linjen och ellipsens utåtriktade normal i punkten $\boldsymbol{p}$.

**Lösning:** $x = y = z = t$ insatt i ellipsoidens ekvation $\Longrightarrow t^2 + t^2 + 2t^2 = 1 \iff t^2 = 1/4 \iff t = \pm 1/2$. Så $\boldsymbol{p} = (1/2, 1/2, 1/2)$.

$F = x^2 + y^2 + 2z^2 \Longrightarrow \operatorname{grad} F = (2x, 2y, 4z) \Longrightarrow \operatorname{grad} F(\boldsymbol{p}) = (1, 1, 2)$, som är den utåtrikade normalvektorn i $\boldsymbol{p}$. Så den sökta vinkeln $\phi$ ges av

$$\cos\phi = \frac{(1,1,1) \bullet (1,1,2)}{|(1,1,1)| \cdot |(1,1,2)|} = \frac{1+1+2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Longrightarrow \phi = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 19{,}5^\circ.$$