KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Betrakta kurvan $x^3 + y^2 = 1$ i xy-planet.

   (a) I vilka punkter på kurvan kan denna lokalt uppfattas som grafen av en funktion $y = y(x)$? (1p)

   (b) Beräkna $y''(x)$ (som funktion av x och $y(x)$) i dessa punkter. (2p)

   Lösning: (a) $F = x^3 + y^2 - 1 \Longrightarrow \partial F/\partial y = 2y$, så $\partial F/\partial y = 0 \iff y = 0$. SVAR: I punkter där $y \neq 0$.

   (b) d/dx på $x^3 + y^2(x) - 1 = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 2y \cdot y' = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} y' = -\frac{3x^2}{2y(x)} \Longrightarrow y'' &= \frac{-2y \cdot 6x + 3x^2 \cdot 2y'}{4y^2} \\ &= -\frac{3x}{2} \cdot \frac{2y - x \cdot (-3x^2/2y)}{y^2} = -\frac{3x}{4y^3}(4y^2 + 3x^3). \end{aligned}$$

2. Bestäm alla lokala maxima, lokala minima och sadelpunkter för funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 y - y^2 + 4x.$$

   (1 poäng för stationära punkter, 2 poäng för deras karaktär).

Lösning:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4 = 4(xy+1)$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 2y = 2(x^2 - y) \Longrightarrow y = x^2$$
$$\Longrightarrow x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow \text{stationära punkten } (-1,1).$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \Longrightarrow \text{ i punkten } (-1,1) \text{ att}$$
$$A = 4,\ B = -4,\ C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = -8 - 16 < 0 \Longrightarrow \text{sadelpunkt.}$$

3. Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ vara en deriverbar kurva i xy-planet och låt $\boldsymbol{p}$ vara en punkt som *inte* ligger på kurvan. Visa att om avståndet $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)|$ minimeras då $t = t_0$ så är vektorn $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0)$ vinkelrät mot kurvan i $\boldsymbol{r}(t_0)$. *Ledning:* Minimera funktionen $f(t) = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)|^2$!

   Lösning:

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)) \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t))\right) = 2(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)) \cdot \left(-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right),$$

   så $df/dt = 0$ för $t = t_0 \Longrightarrow (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0))$ är vinkelrät mot tangentvektorn $d\boldsymbol{r}/dt(t_0) \iff$ är vinkelrät mot kurvan i $\boldsymbol{r}(t_0)$.