KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Betrakta kurvan $x^4y^5 = 1$ i xy-planet.

   (a) I vilka punkter på kurvan kan denna lokalt uppfattas som grafen av en funktion $y = y(x)$? (1p)

   (b) Beräkna $y''(x)$ (som funktion av x och $y(x)$) i dessa punkter. (2p)

   Lösning: (a) $F = x^4y^5 - 1 \Longrightarrow \partial F/\partial y = 5x^4y^4$, så $\partial F/\partial y = 0 \iff xy = 0$. SVAR: I punkter där kurvan *inte* skär koordinataxlarna.

   (b) d/dx på $x^4 \cdot y^5(x) - 1 = 0 \Longrightarrow 4x^3 \cdot y^5 + 5x^4 \cdot y^4 \cdot y' = 0 \iff x^3y^4 \cdot (4y + 5x \cdot y') = 0 \Longrightarrow$

$$y' = -\frac{4y(x)}{5x} \Longrightarrow y'' = \frac{-5x \cdot 4y' + 4y \cdot 5}{25x^2} = \frac{20}{25x^2}\left(y - x \cdot \frac{-4y}{5x}\right)$$
$$= \frac{20}{25x^2} \cdot \frac{5y + 4y}{5} = \frac{4 \cdot 9y}{25x^2} = \frac{36y}{25x^2}.$$

2. Bestäm alla lokala maxima, lokala minima och sadelpunkter för funktionen
$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 - xy - y^2.$$
   (1 poäng för stationära punkter, 2 poäng för deras karaktär).

Lösning:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x - y, \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y \Longrightarrow x = -2y \Longrightarrow 3 \cdot 4y^2 + 16y - y = 0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow 3y \cdot (4y+5) = 0 \Longleftrightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -5/4 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 5/2. \end{cases}$$

Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(5/2, -5/4)$. Andraderivatorna blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2.$$

I $(0,0)$ fås: $A = -8,\ B == -1,\ C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = 16 - 1 > 0$. Och $A < 0,\ AC - B^2 > 0 \Longrightarrow$ **lokalt maximum**.

I $(5/2, -5/4)$ fås: $A = 15 - 8 = 7,\ B = -1,\ C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = -14 - 1 < 0 \Longrightarrow$ **sadelpunkt**.

3. Låt $f(x,y)$ och $g(x,y)$ vara differentierbara funktioner. Visa följande produktregel för differentialer:

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
d(f \cdot g) &= \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g)\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(f \cdot g)\, dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}\right) dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right) \cdot g + f \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}\, dx + \frac{\partial g}{\partial y}\, dy\right) \\
&= df \cdot g + f \cdot dg.
\end{aligned}$$