KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna arean av en cirkelskiva med radien R.

   Lösning: Med polära koordinater blir arean lika med

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} dxdy = \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} r\,drd\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \cdot \int_{r=0}^{R} r\,dr$$
$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{R} = \pi R^2.$$

2. Beräkna volymen av glasstruten $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$.

   Lösning: Struten begränsas nedåt av konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ som i sfäriska koordinater ges av $\theta = \pi/4$, och uppåt av sfären $x^2+y^2+z^2 = 2^2$ med radien lika med 2. Så med hjälp av sfäriska koordinater blir volymen lika med

$$\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta \cdot \int_{r=0}^{R} r^2\,dr$$
$$= 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

3. Beräkna arean av den del av planet $2x + 2y + z = 2$ som ligger inom rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$.

   LEDNING: Det är *väldigt* lätt att beräkna arean av projektionen på xy-planet!

   Lösning: På skärningen mellan planet och paraboloiden är

$$
\begin{aligned}
&z = 2 - 2x - 2y = x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2 \iff \\
&(x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 2 \iff (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2^2,
\end{aligned}
$$

   så projektionen av skärningskurvan ner på xy-planet blir cirkeln med medelpunkt i $(-1,-1)$ och radien 2. Med $E =$ cirkelskivan $\{(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2^2\}$ blir den sökta arean lika med

$$
\begin{aligned}
&\iint_E \sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + 2^2 + 2^2}\, dxdy \\
&= 3 \cdot \iint_E dxdy = 3 \cdot \text{ arean av } E = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = 12\pi.
\end{aligned}
$$