KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna volymen av ett klot med radien R.

   Lösning: Med hjälp av sfäriska koordinater blir volymen lika med

$$\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\cdot\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_{r=0}^{R} r^2\,dr$$

$$= 2\pi[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\cdot(1+1)\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

2. Beräkna arean av ellipsskivan

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1.$$

   Lösning: Sätt först $u = x/2$ och $v = y/3$ så att olikheten ovan övergår i $u^2+v^2 \le 1$ – som betyder enhetsskivan i uv-planet. Inför sedan polära koordinater: $u = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Då blir

$$\begin{cases} x = 2u = 2r\cos\phi, \\ y = 3v = 3r\sin\phi, \end{cases}$$

   där $0 \le r \le 1$ och $0 \le \phi \le 2\pi$. Med dessa så kallade elliptiska koordinater blir

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\phi)} = \det\begin{pmatrix} 2\cos\phi & -2r\sin\phi \\ 3\sin\phi & 3r\cos\phi \end{pmatrix} = 6r\cdot(\cos^2\phi+\sin^2\phi) = 6r, \text{ så att}$$

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\phi)}\right| drd\phi = 6r\,drd\phi.$$ Därmed blir arean lika med

$$\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 6r\,drd\phi = 6\cdot\int_0^{2\pi} d\phi\cdot\int_0^1 r\,dr = 6\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 6\pi.$$

3. Beräkna arean av den del av sadelytan $z = x^2 - y^2$ som ligger ovanför området $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ i xy-planet.

   Lösning: Med $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ blir den sökta arean lika med

$$\iint_E \sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2}\, dxdy$$
$$= \iint_E \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr d\phi$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\phi \cdot \int_0^1 (1 + 4r^2)^{1/2} r\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot (1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(5^{3/2} - 1\right) = \frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1).$$