KTH Matematik,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till KS 4A

i SF1633 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen $f(x, y) = x + 2y$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

   Lösning: Med $g = x^2 + y^2 - 1$ blir Lagrangesystemet

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g \\ g = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} 1 = \lambda \cdot 2x, \\ 2 = \lambda \cdot 2y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array}\right.$$

   $y \cdot$ (första ekvationen) $- x \cdot$ (andra ekvationen) $\Longrightarrow y - 2x = 0 \iff y = 2x$. Insatt i den tredje ekvationen ger detta

$$x^2 + 4x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \text{ punkterna } \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

   f:s värden i dessa punkter är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ och } f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}.$$

   SVAR: Största värdet är $= \sqrt{5}$, minsta är $= -\sqrt{5}$.

2. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

på den slutna enhetsskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 2x - 1 \iff x = 1/2, \\ 0 = \partial f/\partial y = 4y \iff y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ punkten $(1/2,\, 0)$, där $f = 1/4 - 1/2 = -1/4$.

Randen: Där är $y^2 = 1 - x^2$, så $f = x^2 + 2 - 2x^2 - x = -x^2 - x + 2 = g(x)$, säg, med $-1 \leq x \leq 1$. $0 = g'(x) = -2x - 1 \Longrightarrow x = -1/2$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värde på randen:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1 + 1 + 2 = 2, \\ g(-1/2) &= -1/4 + 1/2 + 2 = 2 + 1/4, \\ g(1) &= -1 - 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

SVAR: Största värdet $= 2 + 1/4$, minsta $= -1/4$.

3. Beräkna

$$I = \int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{(x - y)^2}$$

där γ är den del av enhetscirkeln som går från $(0, -1)$ till $(1, 0)$ i den fjärde kvadranten.

Lösning: $I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där

$$P = \frac{-y}{(x - y)^2} \quad \text{och} \quad Q = \frac{x}{(x - y)^2}.$$

RÄTTFRAMMA RÄKNINGAR visar att $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$, så vi kan byta väg (så länge som vi håller oss borta från den elaka linjen $x - y = 0$): låt oss väja $y = x - 1$, där x löper från 0 till 1. På denna är $x - y = 1$ och $dy = dx$, så den sökta integralen reduceras till

$$I = \int_{x=0}^{1} \frac{x\,dx - (x - 1)\,dx}{1^2} = \int_0^1 dx = 1.$$