KTH Matematik,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till KS 4B

i SF 1633 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och de minsta värdena av funktionen $f(x,y) = x+y$ på ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

Lösning: Med $g = x^2/4 + y^2/9 - 1$ fås Lagrangesystemet

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g \\ g = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} 1 = \dfrac{\lambda}{2}\, x, \\ 1 = \dfrac{2\lambda}{9}\, y, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

$4y \cdot$ (första ekvationen) $- 9x \cdot$ (andra ekvationen) $\Longrightarrow 4y - 9x = 0 \iff y = 9x/4$; insatt i den tredje ekvationen fås sedan

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9x^2}{16} = 1 \iff \frac{13x^2}{16} = 1 \iff x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}} \Longrightarrow y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

f:s värden i de två funna punkterna är

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \sqrt{13} \text{ och } f\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \sqrt{13}.$$

SVAR: Största värdet är $= \sqrt{13}$ och det minsta är $= -\sqrt{13}$.

2. Bestäm de största och minsta värdena som funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 2x - 2y$$

antar på den slutna enhetskvadraten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1 \text{ och } 0 \leq y \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:* $\partial f/\partial y = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ finns inga!

Randen består av 4 räta linjestycken, som får undersökas var för sig.

(1) $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f = x^2 - 2x$; derivatan $2x - 2 = 0$ ger $x = 1$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värden:

$$f(0, 0) = 0,$$
$$f(1, 0) = 1 - 2 = -1.$$

(2) $x = 1$ och $0 \leq y \leq 1 \Longrightarrow f = -1 - 2y$, som är *avtagande.* Så största värdet är $f(1, 0) = -1$, och det minsta är $f(1, 1) = -3$.

(3): $y = 1$ och $0 \leq x \leq 1$, respektive (4): $x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$, behandlas på samma sätt.

SVAR: Största värdet är 0 i $(0, 0)$, minsta är -3 i $(1, 1)$.

3. Beräkna

$$I = \oint_\gamma (e^x \cos x - y)\, dx + (2xy - \arctan(y^2))\, dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq 1\}$.

Lösning: $I = \oint_\gamma P\, dx + Q\, dy$, där

$$P = e^x \cos x - y \quad \text{och} \quad Q = 2xy - \arctan(y^2).$$

Därmed blir $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2y + 1$. Green säger då att

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2y + 1)\, dxdy = \int_{x=-1}^{x=1} \left[y^2 + y\right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2 - x^4 - x^2)\, dx = 2\int_0^1 (2 - x^4 - x^2)\, dx \\ &= 2\left[2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \cdots = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$