KTH Matematik, Jockum Aniansson.

Tentamen kurs SF1626 Flervariabelanalys för IT1 och ME1, måndagen den 19 maj 2008 klo. 14 – 19.

Inga hjälpmedel. / Den som har godkänt på kontrollskrivning nr i får automatiskt full poäng på uppgift nummer i, där $1 \le i \le 4$.

De fyra första uppgifterna ger vardera maximalt 3 poäng; övriga ger maximalt 4 poäng, så maximum är 28 poäng. Preliminär betygsgräns för godkänt är 14 poäng. Den som erhåller 13 poäng (preliminärt) får betyg Fx, vilket innebär att Du får möjlighet att *komplettera* till betyg godkänt. Denna komplettering sker preliminärt i samband med den schemalagda kurstentamen som går den 29 maj. Skriv gärna ner Din epostadress på Din tentamen, så kan vi kontakta Dig ifall Du fått betyget Fx. För övriga betygsgränser, se kursPM.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget måste förklaras i ord. Bristande läsbarhet medför poängavdrag.

1.) En person går uppför och nedför en kulle som beskrivs av höjden $z = 20 - (x+2)^2 - y^2$ längs en väg på kullen, vars projektion på xy–planet ges av enhetscirkeln. Var leder vägen brantast uppåt resp. nedåt och hur brant är det där?

Lösningar.
1.) Låt $f(x, y) = 20 - (x+2)^2 - y^2$. Parametrisera enhetscirkeln på vanligt sätt: $x = x(t) = \cos t$, $y = y(t) = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Då kan vägen på kullen parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, där höjden $z(t)$ ges av $z(t) = f(x(t), y(t))$.
Vägens “branthet” eller “bränta” bestäms av funktionen

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) =$$
$$= (-2)(x+2\ ,\ y) \cdot (-\sin t +,\ \cos t) = ... = 4 \sin t = 4y\,.$$

Denna funktion blir extrem (maximal eller minimal) då $y = \pm 1$, och antager då värdena ± 4.
Svar: Då $x = 0$ (varav $y = \pm 1$); där är lutningskoefficienten längs vägen ± 4.

2.) Betrakta ytan $S\ :\ 2x + y^3 = 3yz$ i xyz-rummet.
a) När kan man lokalt nära punkten Q lösa ut z som en funktion av de övriga variablerna? Vad händer om Q ligger på z-axeln? Ligger z-axeln på S?

b) När kan man lokalt nära punkten Q lösa ut y som en funktion av de övriga variablerna? Visa att om Q *inte* ligger på parameterkurvan
$\gamma\ :\ \mathbf{r}(t) = (t^3, t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$, så går det bra.

c) Ligger parameterkurvan γ på ytan S ?

2.) Låt funktionen G ges av $G(x, y, z) = 2x + y^3 - 3yz$. Ytan S kan då beskrivas som nivåytan $G(x, y, z) = 0,$. Enligt implicita funktionssatsen kan man lösa ut z lokalt nära Q som en funktion av x och y, ifall $0 \ne \frac{\partial G}{\partial z} = -3y$ uti punkten Q.
Om Q ligger på z-axeln, så har Q koordinater $(0, 0, z)$ och duger ej ovan.
Varje punkt på z-axeln uppfyller $G = 0$ och ligger därför på ytan S.

b) På samma sätt kan vi lokalt nära Q lösa ut y längs S som funktion av x och z ifall $0 \neq \frac{\partial G}{\partial y} = 3(y^2 - z)$ uti punkten Q. För punkter Q på ytan S är detta villkor är uppfyllt precis då Q *inte* ligger på kurvan γ.
c) Kurvan γ ligger på ytan S eftersom $G(t^3, t, t^2) = 0$ för alla reella t.
Svar: a) Då $y \neq 0$. Det går ej bra då Q ligger på z-axeln, som helt och hållet ligger på S. b) Då $z - y^2 \neq 0$. c) Ja.

3.) Bestäm arean av den buktiga ytan $4z + 3\sqrt{x^2+y^2} = 6$, $z \geq 0$.
3.) Man kan t ex lösa ut z som funktion av x och y :

$$z = f(x,y) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Denna funktion är ickenegativ då $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Den buktiga ytan är en kon med spetsen uppåt. Dess area blir

$$A = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dxdy\,.$$

Här är $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3}{4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ med liknande y-derivata. Därför blir $|\nabla f| = \frac{3}{4}$, och $\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$, varav

$$A = \iint_D \frac{5}{4}\, dxdy = \frac{5}{4}\iint_D dxdy = \frac{5}{4}\text{area}D = \frac{5}{4}4\pi = 5\pi\,.$$

Svar: 5π.

4.) Låt γ vara en kurva i xy-planet från punkten (x_1, y_1) till punkten (x_2, y_2). Låt f vara en C^2-funktion. Beräkna konturintegralen $\int_\gamma f'(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy)$.

Svar: $\frac{1}{2}\{f(x_2^2 + y_2^2) - f(x_1^2 + y_1^2)\}$.

5.) För vilka värden på talet c kan man lösa ekvationen $x^8y^2 = c\exp(x^2 + 3y^{2/3})$? Här är $\exp u = \mathrm{e}^u$. *Ledtråd.* Ekvationen kan skrivas på formen $c = f(x,y)$.

Svar: $0 \leq c \leq 2^8/\mathrm{e}^7$.

6.) En oändligt stor äggkartong beskrivs av funktionen $z = 5\cos(x+y) + 3\sin 2(x-y)$. Bestäm de lokala kritiska värdena för denna funktion samt klassificera dem.

Svar: De lokala maxima är $5 + 3 = 8$ och de lokala minima $-5 - 3 = -8$.

7.) Låt $D : x \geq 1, y \geq 1$.
Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x - 2y}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy\,.$$

Svar: $-\pi/8$.

8.) Området D i första kvadranten begränsas av hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$, x-axeln samt den räta linjen från origo till punkten $(x_0, y_0) = (\cosh t_0, \sinh t_0)$, där $0 < y_0 < x_0$. Bestäm områdets area.

Svar: $\frac{t_0}{2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}\right) = \ldots$