Institutionen för matematik
KTH

Förslag till lösningar till tentamensskrivning i SF1628, Komplex analys, 2008-06-04

1. Den första Cauchy-Riemann-ekvationen $u_x = v_y$ ger då

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin 2x \sinh 2y.$$

Integration med avseende på y ger nu:

$$v(x,y) = -\sin 2x\,\cosh 2y + \varphi(x),$$

där $\varphi(x)$ är en funktion av x som bestäms av den andra Cauchy-Riemann-ekvationen $u_y = -v_x$. Från denna erhålls

$$2\cos 2x\,\cosh 2y = 2\cos 2x\,\cosh 2y - \varphi'(x).$$

Således är $\varphi(x)$ konstant. Den allmänna lösningen är därför

$$f(z) = \cos 2x\,\sinh 2y - i\sin 2x\,\cosh 2y + iC = -i\sin 2z + iC.$$

Svar. Den sökta funktionen är $f(z) = -i\sin 2z + iC$.

2. Taylorserien för sinus

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{2k+1},$$

som är konvergent för alla $w \in \mathbb{C}$ ger att

$$\begin{aligned} z\sin\frac{1}{z-1} &= (z-1)\sin\frac{1}{z-1} + \sin\frac{1}{z-1} \\ &= (z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{-2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{-2k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^{-n}, \end{aligned}$$

där $a_{2k} = a_{2k+1} = (-1)^{-k}/((2k+1)!)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ och detta ger svaret.

3. Skriv $F(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = 7z^3$ och $g(z) = z^6 + 2z + 3$. Vi får då $|z| = 1$ att

$$|g(z)| \leq |z|^6 + 2|z| + 3 = 6 < 7 = |7z^3| = |f(z)|$$

Eftersom $f(z)$ har 3 nollställen räknade med multiplicitet i $|z| < 1$ fås enligt Rouchés sats att den givna funktionen $F(z) = f(z) + g(z)$ har 3 nollställen, vilket är det givna påståendet.

4. Den givna integralen beräknas genom att beräkna konturintegralen av funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

längs kurvan $\Gamma_R = I_R + C_R$ där I_R är det reella linjestycket från $-R$ till R och C_R är halvcirkelbågen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ från $z = R$ till $z = -R$. Residusatsen get att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \tag{1}$$

där z_0 är lösningen till ekvationen $z^2 + 4 = 0$ i övre halvplanet. Man ser att

$$z_0 = 2i$$

Residun är då enligt formeln för residun i en dubbelpol

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2}\Big|_{z=2i} = (-2) \cdot (z+2i)^{-3}\Big|_{z=2i} = -\frac{i}{32}.$$

Integralen längs halvcirkeln kan uppskattas enligt följande

$$\Big|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz\Big| \leq \int_{C_R} \frac{1}{(R^2-4)^2}\, |dz| \leq \frac{\pi R}{(R^2-4)^2} \to 0$$

då $R \to \infty$.

Efter att låtit $R \to \infty$ i (1) erhåller man slutligen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx = 2\pi i \cdot \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}.$$

Svar. Integralen blir $\frac{\pi}{16}$.