Institutionen för matematik
KTH

Förslag till lösningar till tentamensskrivning i SF1628, Komplex analys, 2008-03-11

1. Låt $u(x,y) = e^{2y}\sin 2x + x^2 - y^2$ och beteckna dess komplexa konjugat med $v(x,y)$. Den första Cauchy-Riemann-ekvationen $u_x = v_y$ ger då

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2y}\sin 2x + x^2 - y^2\right)\\ &= 2e^{2y}\cos 2x + 2x\end{aligned}$$

Integration med avseende på y ger nu:

$$v(x,y) = e^{2y}\cos 2x + 2xy + \varphi(x),$$

där $\varphi(x)$ är en funktion av x som bestäms av den andra Cauchy-Riemann-ekvationen $u_y = -v_x$. Från denna erhålls

$$2e^{2y}\sin 2x - 2y = 2e^{2y}\sin 2x - 2y - \varphi'(x).$$

Således är $\varphi(x)$ konstant. Villkoret $f(0) = 0$ ger nu $\varphi(x) = 0$ för alla x. Då man skriver om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ på komplex form fås.

$$f(z) = ie^{-2iz} + z^2.$$

Svar. Den sökta funktionen är $f(z) = ie^{-2iz} + z^2$.

2. Man observerar att för $|z| > 1$ gäller enligt formeln för en geometrisk serie att

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\\ &= \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}.\end{aligned}$$

och detta ger svaret.

3. Skriv $F(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = z^4$ och $g(z) = -\sin z$. Vi får då $|z| = 2$ att

$$\begin{aligned}|-\sin z| &= |\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}| \le \frac{e^{|z|} + e^{|z|}}{2}\\ &\le e^{|z|} = e^2 < 9 < 16 = |z|^4 = |f(z)|.\end{aligned}$$

Eftersom $f(z)$ har 4 nollställen räknade med multiplicitet i $|z| < 1$ fås enligt Rouchés sats att den givna funktionen $F(z) = f(z) + g(z)$ har 4 nollställen.

Svar. Den funktionen har 4 nollställen innanför enhetscirkeln.

4. Den givna integralen beräknas genom att beräkna konturintegralen av funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z+z^2}$$

längs kurvan $\Gamma_R = I_R + C_R$ där I_R är det reella linjestycket från $-R$ till R och C_R är halvcirkelbågen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ från $z = R$ till $z = -R$. Residusatsen get att

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \tag{1}$$

där z_0 är lösningen till ekvationen $z^2 + z + 1 = 0$ i övre halvplanet. Man ser att

$$z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Residun är då enligt formeln för residun i en enkelpol

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{e^{iz}}{2z+1}\Big|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2})/i\sqrt{3}.$$

Integralen längs halvcirkeln kan uppskattas enligt följande

$$|\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z+z^2}\,dz| \leq \int\limits_{C_R} \frac{e^{-y}}{R^2-R-1}\,|dz| \leq \frac{\pi R}{R^2-R-1} \to 0$$

då $R \to \infty$.

Efter att ha tagit realdel i (1) och låtit $R \to \infty$ erhåller man slutligen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x+x^2}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos\frac{1}{2}.$$

Svar. Integralen blir $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos\frac{1}{2}$.