KTH Matematik
Lars Filipsson

Lappskrivning 1 i 5B1201 Komplex analys 2007-02-02
Lösningsförslag

1. **Låt $u(x,y) = 3x^2y - y^3 - 1$. Går det att hitta en funktion v sådan $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ är analytisk? Gör det i så fall!**

Lösning: Vi deriverar och får att $\partial u/\partial x = 6xy$ och $\partial^2 u/\partial x^2 = 6y$ och $\partial u/\partial y = 3x^2 - 3y^2$ och $\partial^2 u/\partial y^2 = -6y$. Alltså är $\Delta u = 0$ och u harmonisk i hela planet. Eftersom planet är enkelt sammanhängande kan vi hitta v så att $u + iv$ är analytisk. Vi måste då välja v så att v är C^1 och Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda av u och v. Med andra ord måste $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = 3y^2 - 3x^2$. Vi integrerar och får att $v = 3xy^2 - x^3 + C(y)$ för någon lämplig funktion C. Vi deriverar detta med avseende på y och får $\partial v/\partial y = 6xy + C'(y)$, vilket enligt Cauchy-Riemann ska vara lika med $\partial u/\partial x$ som ovan beräknades till $6xy$. Detta ger att vi kan välja $C(y) = 0$. En funktion som uppfyller villkoren i uppgiften är alltså $v(x,y) = 3xy^2 - x^3$.

Svar: Om vi väljer $v(x,y) = 3xy^2 - x^3$ så blir $u + iv = (3x^2y - y^3 - 1) + i(3xy^2 - x^3)$ analytisk i hela planet. (Funktionen kan i komplex notation skrivas $f(z) = iz^3 - 1$)

2. **Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 4z + 5}$ där γ är cirkeln $|z - 3i| = 4$ genomlöpt ett varv i positiv led.**

Lösning: Med pq-formeln fås nämnarens nollställen till $2 - i$ och $2 + i$ varav det sistnämnda ligger innanför kurvan. Med hjälp av faktorsatsen kan nämnaren faktoriseras som $(z - 2 + i)(z - 2 - i)$. Kurvintegralen kan nu med hjälp av Cauchys integralformel räknas ut som $(2\pi i)/(2 + i - 2 + i) = \pi$. (Integralen kan också räknas ut på ett flertal andra sätt.)

Svar: π.

3. **Låt $f(z) = z^{1+2i}$, principalgrenen. Bestäm $f'(i)$ på formen $a + ib$.**

Lösning: Derivatan fås som $f'(z) = (1 + 2i)z^{1+2i}/z = (1 + 2i)e^{(1+2i)\log z}/z$, principalgrenen, vilket ger att $f'(i) = (2 - i)e^{(1+2i)i\pi/2} = (1 + 2i)e^{-\pi} = e^{-\pi} + i2e^{-\pi}$.

Svar: $e^{-\pi} + i2e^{-\pi}$.