Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 25 mars 2008.

DEL I

1. (3p) Bestäm antalet binära ord av längd 15 som innehåller precis 3 stycket ettor. Svaret skall ges i formen av ett heltal.

   Lösning: Bland 15 möjliga positioner för ettorna i ordet skall tre positioner väljas. Detta kan ske på

   $$\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455,$$

   olika sätt.

   SVAR: 455.

2. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de bägge talen 567 och 312.

   Lösning: Använder Euklides algoritm:

   $$\begin{array}{rcrcr} 567 & = & 2 \cdot 312 & - & 57 \\ 312 & = & 6 \cdot 57 & - & 30 \\ 57 & = & 2 \cdot 30 & - & 3 \\ 30 & = & 10 \cdot 3 & + & 0 \end{array}$$

   Eftersom den sista ickeförsvinnande resten är 3 så får vi

   SVAR: Den sökta största gemensamnma delaren är 3.

3. (3p) Vilka av graferna K_7, K_8, $K_{3,4}$ och $K_{4,4}$ har en Eulerkrets eller en Hamiltoncykel eller både och.

   Lösning: Först undersöker vi vilka av graferna som har en Eulerkrets. En sådan finns precis då grafen är sammanhängande och varje nod har en jämn valens.

   Alla de givna graferna är sammanhängande. I K_7 har alla noder valensen 6 och alltså har K_7 en Eulerkrets, i K_8 har alla noder valensen 7 och den grafen saknar en Eulerkrets. I $K_{3,4}$ har tre av noderna valens fyra och fyra av noderna valens tre så denna graf saknar Eulerkrets också. Men alla noder i $K_{4,4}$ har valens fyra så den grafen har en Eulerkrets.

   Både K_7 och K_8 har hamiltoncykler, vilket vi lätt ser om vi först ritar en cykel med 7 resp 8 noder, och sedan förbinder alla noder med kanter som inte finns med i cykeln. Då får vi K_7 resp K_8.

   I $K_{4,4}$ benämner vi X-noderna med x_1, x_2, x_3 och x_4, och Y-noderna med y_1, y_2, y_3 och y_4. Cykeln

   $$x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_4 y_4 x_1$$

   bildar en Hamiltoncykel.

   I varje cykel i en bipartit graf är varannan nod en X-nod och varannan nod en Y-nod och alltså består varje cykel då av ett jämnt antal noder. Eftersom $K_{3,4}$ innehåller ett udda antal noder så kan den inte ha en Hamiltoncykel, eftersom en sådan besöker varje nod precis en gång.

4. (3p) Bestäm den minsta positiva resten som erhålls när talet 53^{36} delas med talet 37.

   Lösning: Vi använder Fermats lilla sats. Eftersom 37 är ett primtal och talet 37 inte delar talet 53 gäller att
   $$53^{37-1} \equiv 1 \pmod{37}.$$
   Därmed har vi omedelbart vårt

   SVAR: Talet 1.

5. (3p) Avgör om permutationerna $\varphi = (1\ 2\ 4)(3\ 2\ 5)(5\ 6\ 7\ 8)$ och $\psi = (1\ 4\ 5)(3\ 2\ 6)(3\ 6\ 7\ 8)$ är konjugerade permutationer.

   Lösning: Vi undersöker om permutationerna är av samma typ genom att skriva dem som produkter av disjunkta cykler. Vi finner att
   $$\varphi = (1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 3\ 4),$$
   som alltså är av typen $[8^1]$ samt
   $$\psi = (1\ 4\ 5)(2\ 6\ 7\ 8)(3),$$
   som är av typen $[1^1 3^1 4^1]$. Eftersom permutationerna är av olika typ så är de inte konjugerade.

DEL II

6. (3p) Betrakta talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$, där
   $$a_n = 4 \cdot 3^n - 2 \cdot (-1)^n \qquad \text{för} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ .$$
   Bestäm en rekursionsekvation för denna talföljd.

   Lösning: En karakteristisk ekvation med rötterna 3 och -1 är
   $$r^2 = 2r + 3,$$
   eftersom ekvationen $(r-3)(r+1) = 0$ har rötterna 3 och -1 och $(r-3)(r+1) = r^2 - 2r - 3$. Rekursionsekvationen
   $$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$$
   har alltså den allmänna lösningen
   $$a_n = A3^n + B(-1)^n.$$
   För att rekursionsekvationen skall var väldefinierad krävs också startvärden. Dessa ges omedelbart av att
   $$a_0 = 4 \cdot 3^0 - 2(-1)^0 = 4 - 2 = 2, \qquad a_1 = 4 \cdot 3^1 - 2(-1)^1 = 12 + 2 = 14.$$
   Således

   SVAR: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, för $n = 2, 3, 4, \ldots$ och $a_0 = 2$ och $a_1 = 14$.

7. (4p) Låt G vara en graf utan multipla kanter och loopar. Bestäm det största antal, resp minsta antal komponenter G kan bestå av om G har 41 noder och 37 kanter.

   Lösning: Grafen kommer att ha minmalt antal komponenter när varje komponent innehåller så få kanter som möjligt.

Varje komponent är en sammanhängande graf, och en sammanhängande graf med minimalt antal kanter är ett träd, eftersom om en kant tas bort i ett träd faller trädet sönder i två träd. Vidare så gäller att ett träd med v noder innehåller $e = v - 1$ stycken kanter.

Största antalet komponenter får vi alltså när komponenterna innehåller v_i stycken noder för $i = 1, 2, \ldots, c$, där c betecknar antalet komponenter. Vi har då likheterna

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_c &= 41 \\ e_1 + e_2 + \ldots + e_c &= 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_c &= 41 \\ (v_1 - 1) + (v_2 - 1) + \ldots + (v_c - 1) &= 37 \end{cases}$$

som ger att

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_c &= 41 \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_c &= 37 + c \end{cases}$$

Vi finner alltså att minimalt antal komponenter är 4.

Maximalt antal komponenter har vi när komponenterna har onödigt många kanter för att hänga ihop. Detta inträffar när komponenterna är kompletta grafer. En komplett graf med v noder har $\binom{v}{2}$ stycken kanter, vilket är det maximala antalet kanter i en graf. Givetvis behöver inte komponenerna i den graf vi söker vara kompletta grafer. Flest överflödiga kanter får vi när komponenten innehåller så många noder som möjligt. En komponent med tre noder ger en överflödig kant, en med fyra noder ger tre överflödiga kanter och allmänt en graf med v noder ger

$$\binom{v}{2} - (v-1) = \frac{v(v-1)}{2} - (v-1) = \frac{(v-1)(v-2)}{2}$$

överflödiga kanter, om komponenterna är kompletta grafer.

Antag en av komponenterna består av nio noder. Den kan som mest ha 36 kanter. Tag en sådan komponent, återstår en kant som kopplar ihop två noder. Nu har vi använt 11 noder. Resterande 30 noder bildar varsina komponenter. I detta fall kan vi alltså få 32 komponenter.

Antag maximala antal noder i en komponent är åtta. Antal kanter i en sådan komponent är som mest 28. Återstår åtta kanter som kan användas i en komponent med fem noder. Nu har vi använt alla kanter och sammanlagt 13 noder, så återstår 28 noder som bildar sina egna komponenter. I detta fall blev antalet komponenter 30.

Fortsätter vi att resonera på samma sätt ser vi att maximal anatlet komponenter kommer att vara 32.

8. (4p) Beskriv på ett lämpligt sätt samtliga hela tal x sådana att

$$(2x - 17)(9x - 33) \equiv 0 \pmod{35}.$$

Lösning: Vi skall bestämma samtliga hela tal x sådana att

$$35 \mid (2x - 17)(9x - 33).$$

Det finns nu, eftersom $35 = 5 \cdot 7$ fyra möjligheter:

$$\begin{array}{l} 35 \mid (2x-17), \\ 35 \mid (9x-33), \\ 5 \mid (2x-17) \text{ och } 7 \mid (9x-33), \\ 7 \mid (2x-17) \text{ och } 5 \mid (9x-33) \end{array}$$

I det första fallet har vi att $2x \equiv 17 \pmod{35}$ och eftersom $2 \cdot 18 \equiv 1 \pmod{35}$ så får vi att

$$x \equiv_{35} 18 \cdot 17 \equiv_{35} 306 \equiv_{35} 1, \qquad \text{dvs} \qquad 35 \mid (x-1)$$

så i detta fall gäller att det är talen $x = 1 + n \cdot 35$ som satisfierar ekvationen.

I det andra fallet har vi att $9x \equiv 33 \pmod{35}$ och eftersom $9 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{35}$ så får vi att

$$x \equiv_{35} 4 \cdot 33 \equiv_{35} 132 \equiv_{35} 27, \qquad \text{dvs} \qquad 35 \mid (x-27)$$

så i detta fall gäller att det är talen $x = 27 + n \cdot 35$ som satisfierar ekvationen.
I det tredje fallet gäller

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} 2x & \equiv & 17 & \pmod 5 \\ 9x & \equiv & 33 & \pmod 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} 2x & \equiv & 2 & \pmod 5 \\ 2x & \equiv & -2 & \pmod 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} x & \equiv & 1 & \pmod 5 \\ x & \equiv & -1 & \pmod 7 \end{array} \right. .$$

Kinesiska restsatsen ger nu ansatsen

$$x = A5 + B7 + n \cdot 35 \quad \Leftrightarrow \quad 2B \equiv 1 \pmod 5 \quad \text{och} \quad -2A \equiv -1 \pmod 7.$$

$B = 3$ och $A = 4$ ger en lösning och vi har

$$x = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + n \cdot 35 = 6 + (n-1)35.$$

Tillslut det sista och fjärde fallet. Då gäller

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} 2x & \equiv & 17 & \pmod 7 \\ 9x & \equiv & 33 & \pmod 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} 2x & \equiv & -4 & \pmod 7 \\ -x & \equiv & -2 & \pmod 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} x & \equiv & -2 & \pmod 7 \\ x & \equiv & 2 & \pmod 5 \end{array} \right. .$$

Kinesiska restsatsen ger nu ansatsen

$$x = A5 + B7 + n \cdot 35 \quad \Leftrightarrow \quad 2B \equiv 2 \pmod 5 \quad \text{och} \quad -2A \equiv -2 \pmod 7.$$

$B = 1$ och $A = 1$ ger en lösning och vi har

$$x = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + n \cdot 35 = 12 + n35.$$

SVAR: $x = 12 + n35$, $x = 6 + n35$, $x = 27 + n35$ eller $x = 1 + n35$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt för varje funktion f från $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ till $B = \{1, 2, 3, 4\}$, och för varje element $i \in B$, $f^{INV}(i)$ beteckna följande mängd

$$f^{INV}(i) = \{j \in A \mid f(j) = i\}.$$

(a) (1p) Bestäm antalet surjektioner f från A till B sådana att $|f^{INV}(i)| = 3$ för $i = 1, 2, 3, 4$.

Lösning: Elementen i mängden A skall delas in i fyra säckar, vardera med tre element, och med etiketterna 1, 2, 3 och 4. Elmenten i säck i är elementen i mängden $f^{INV}(i)$. Antalet sätt detta går på är

$$\binom{12}{3, 3, 3, 3}$$

(b) (2p) Bestäm antalet surjektioner f från A till B sådana att $|f^{INV}(i)| = 3$ för $i = 1, 2$.

Lösning: Operation 1: Välj element till mängden $f^{INV}(1)$. Antal möjligheter är $n_1 = \binom{12}{3}$.
Operation 2: Välj element till mängden $f^{INV}(2)$. Antal möjligheter är $n_2 = \binom{9}{3}$.
Operation 3: Bestäm $f(i)$ för $i \notin (f^{INV}(1) \cup f^{INV}(2))$ och så att f blir en surjektion. Detta motsvarar att bestämma antalet surjektioner från en mängd med $12 - 6 = 6$ element till mängden $\{3, 4\}$. Antalet möjligheter är $n_3 = S(6, 2) \cdot 2!$.
Total antalet möjligheter blir alltså
SVAR:

$$\binom{12}{3}\binom{9}{3}S(6,2) \cdot 2!.$$

(c) (2p) Bestäm antalet surjektioner f från A till B sådana att $|f^{INV}(i)| \geq 2$ för $i = 1, 2, 3, 4$.

Lösning: Vi använder oss av principen om inklusion exklusion. Totala antalet surjektioner är $S(12, 4) \cdot 4!$. Låt A_i, för $i = 1, 2, 3, 4$, beteckna de surjektioner som är sådana att $|f^{INV}(i)| = 1$. Svaret ges du av uttrycket

$$S(12, 4) \cdot 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.$$

Enligt principen om inklusion exklusion kan nu svaret härledas ur storleken på alla möjliga snitt av mängderna A_1, A_2, A_3 och A_4.
Vi bestämmer nu antalet element i A_1:
Op. 1: Bestäm det element k som avbildas på 1: $n_1 = 12$.
Op. 2: Bestäm antalet surjektioner från $\{1, \ldots, 12\} \setminus \{k\}$ till $\{2, 3, 4\}$: $n_2 = S(11, 3) \cdot 3!$.
Alltså

$$|A_1| = 12 \cdot S(11, 3) \cdot 3! = |A_2| = |A_3| = |A_4|.$$

På samma sätt bestämmer vi antalet element i övriga snittmängder. Vi får

$$|A_i \cap A_j| = 12 \cdot 11 \cdot S(10, 2) \cdot 2!, \qquad |A_i \cap A_j \cap A_k| = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot S(9, 1) \cdot 1!,$$

samt

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

Eftersom det finns 6 tvåsnitt och fyra tresnitt får vi tillslut
SVAR:

$$S(12, 4) \cdot 4! - 4 \cdot 12 \cdot S(11, 3) \cdot 3! + 6 \cdot 12 \cdot 11 \cdot S(10, 2) \cdot 2 - 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot S(9, 1).$$

(Svaret får innehålla beteckningar givna i kursmaterial och på föreläsningar.)

10. (5p) Låt p vara ett primtal som delar det positiva hela talet n. Utred om det finns något samband mellan antalet tal mellan 1 och n som är relativt prima till talet n och antalet tal mellan 1 och n/p som är relativt prima till n/p. Ange i så fall detta samband.

Lösning: Vi använder att $\varphi(n)$, som betecknar antalet tal mellan 1 och n som är relativt prima till n, och kan beräknas enligt formeln

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}) \qquad \text{om} \qquad n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k},$$

där p_1, p_2, ..., p_k är olika primtal och $e_1 > 0$, $e_2 > 0$, ..., $e_k > 0$.

Vi kan anta att $p = p_j$ och vi betraktar två fall: $e_j = 1$ och $e_j > 1$.

I det första fallet har vi att

$$\varphi(\frac{n}{p}) = \frac{n}{p_j}\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})}{(1-\frac{1}{p_j})},$$

som vi förenklar till

$$\varphi(\frac{n}{p}) = n\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})}{(p_j-1)} = \varphi(n)/(p-1).$$

Om p, men inte p^2, delar n så gäller alltså att

$$\varphi(\frac{n}{p}) = \varphi(n)/(p-1) \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad (p-1)\varphi(\frac{n}{p}) = \varphi(n).$$

I det andra fallet har vi

$$\varphi(\frac{n}{p}) = \frac{n}{p_j}\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}),$$

som vi förenklar till

$$\varphi(\frac{n}{p}) = \frac{n}{p}\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}) = \varphi(n)/p.$$

Om p^2 delar n så gäller

$$\varphi(\frac{n}{p}) = \varphi(n)/p.$$