

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3B till kursen Diskret matematik, moment B, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 23 april 2008, kl 08.15-08.40.

1. Visa att polynomet $x^3 + 3x + 4$ inte är irreducibelt i ringen $Z_5[x]$.

LÖSNING: Om polynomet går att faktorisera måste en av faktorerna ha grad ett och därmed, enligt faktorsatsen, kommer polynomet att ha minst ett nollställe. Vi finner, efter lite sökande, att -1 , dvs elementet 4 i kroppen Z_5 , är ett nollställe eftersom

$$(-1)^3 + 3(-1) + 4 = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Enligt faktorsatsen gäller nu att

$$x^3 + 3x + 4 = (x - 4)p(x),$$

för något polynom $p(x)$ vilket visar att det givna polynomet inte är irreducibelt.

2. Bestäm ett irreducibelt andragradspolynom i polynomringen $Z_{19}[x]$, (vilket är möjligt att göra utan alltför mycket trial and error sökande). En motivering krävs också varför polynomet i fråga är irreducibelt.

LÖSNING: Vi undersöker först om det finns något polynom av typen

$$x^2 - a,$$

som är irreducibelt i den givna polynomringen. Ett sådant polynom är irreducibelt, då det är av grad 2, om och endast om polynomet saknar nollställe, dvs det finns inget element $\alpha \in Z_{19}$ sådant att $\alpha^2 = a$. Vi beräknar nu kvadraterna på samtliga element i ringen Z_{19} .

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0, & 1^2 &= (-1)^2 = 18^2 = 1, & 2^2 &= (-2)^2 = 17^2 = 4, & 3^2 &= (-3)^2 = 16^2 = 9, \\ 4^2 &= (-4)^2 = 15^2 = 16, & 5^2 &= (-5)^2 = 14^2 = 6, & 6^2 &= (-6)^2 = 13^2 = 17, \\ 7^2 &= (-7)^2 = 12^2 = 11, & 8^2 &= (-8)^2 = 11^2 = 7, & 9^2 &= (-9)^2 = 10^2 = 5. \end{aligned}$$

Vi ser att elementet 2 inte dök upp bland de "jämnas" kvadraterna i ringen Z_{19} . Således saknas nollställena till polynomet

$$x^2 - 2.$$

SVAR: Polynomet $x^2 - 2$ är irreducibelt i polynomringen $Z_{19}[x]$.

Alternativ lösning: Vi använder att multiplikativa gruppen till en kropp är cyklisk, dvs och i detta fall, att det finns ett element $g \in Z_{19}$ sådant att

$$Z_{19} \setminus \{0\} = \langle g \rangle = \{g, g^2, g^3, \dots, g^{18} = 1\}.$$

De jämna kvadraterna i ringen är då elementen i mängden

$$\mathcal{Q} = \{(g^i)^2 \mid i = 1, 2, \dots, 18\} = \{g^2, g^4, g^6, \dots, g^{18} = 1\}.$$

Elementet g^9 är ingen jämn kvadrat. Vi visar nu att g^9 är lika med elementet -1 (oberoende av val av generator g för den multiplikativa gruppen): Eftersom $(g^9)^2 = 1$ så måste g^9 vara en av lösningarna till ekvationen $x^2 = 1$. Då $g^{18} = 1$ och $g^{18} \neq g^9$ så måste g^9 vara lika med den andra lösningen till ekvationen $x^2 = 1$ som ju är -1 .

Vår slutsats är alltså att -1 inte är en jämn kvadrat och alltså att ekvationen $x^2 + 1$ saknar nollställe och därmed faktorer av grad ett. Ett ej irreducibelt polynom av grad två måste ha faktorer av grad ett och därmed minst ett nollställe. Alltså är $x^2 + 1$ irreducibelt i $Z_{19}[x]$.