Lösning till MODELLTENTA DISKRET MATEMATIK moment A FÖR D2 och F, SF1631 resp SF1630.

DEL I

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{23} till ekvationen

$$19x + 2 = 17.$$

Lösning: Söker först en invers till 19 i ringen Z_{23}. Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcl} 23 & = & 1 \cdot 19 + 4 \\ 19 & = & 5 \cdot 4 - 1 \end{array}$$

varur vi får att $1 = 5 \cdot 4 - 19 = 5(23 - 19) - 19 = 5 \cdot 23 - 6 \cdot 19$. Alltså är $19^{-1} = -6$ i ringen Z_{23}. Vi löser nu ekvationen:

$$19x + 2 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 19x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6 \cdot 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -90 \pmod{23} = 2$$

SVAR: 2.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = a_{n-1} + 30a_{n-2}$$

med startvärden $a_0 = 1, a_1 = -27$.

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 = r + 30$ har rötterna $r = -5$ och $r = 6$. Rekursionsekvationens allmänna lösning blir då

$$a_n = A \cdot (-5)^n + B6^n.$$

Nu bestämmer vi A och B så att startvärdena blir uppfyllda:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 1 & = & A \cdot (-5)^0 & + & B6^0 \\ -27 & = & A \cdot (-5)^1 & + & B6^1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 1 & = & A & + & B \\ -27 & = & -5A & + & 6B \end{array} \right.$$

Ett simpelt linjärt ekvationssytem med l lösningarna

$$A = 3, \quad B = -2.$$

Således

Svar:

$$a_n = 3(-5)^n - 2 \cdot 5^n.$$

3. (3p) Den bipartita grafen med nodmängderna $X = \{a, b, c, d\}$ och $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ har kanterna $\{a1, a3, b3, c2, d2, d4, d5\}$. Bestäm en alternerande stig till matchningen $M = \{a3, d2\}$.

Lösning: En alternerande stig börjar i en omatchad nod, t ex b, som har en kant till 3, så vi börjar med kanten $b3$. Från noden 3 måste vi, om den noden är matchad ta en kant i givnma matchningen dvs kanten $a3$. Vi väljer nu att från noden a välja kanten $a1$ och då 1 är omatchad så är vi klar.

Svar: $b - 3 - a - 1$.

4. (3p) I en skolklass med 13 flickor och 12 pojkar skall man utse en grupp bestående av tre flickor och fyra pojkar. På hur många sätt kan en sådan grupp utses om precis en av pojkarna P_1 och P_2 i klassen, skall vara med i gruppen. (Svaret får innehålla de fyra räknesätten.)

   Lösning: Anatl sätt att utse en grupp fyra pojkar med pojken P_1 men utan pojken P_2 är

$$\binom{12-2}{3}$$

   ty utse först pojken P_1, tag sedan bort P_2. Återstår nu $12-2$ pojkar av vilka tre till skall väljas till gruppen.

   På lika många sätt kan en pojkgrupp med P_2 medn utan P_1 utses.

   Antalet sätt som flickorna kan utses på är

$$\binom{13}{3}.$$

   Multiplikationsprincipen ger nu totala antalet sätt dvs

   SVAR:

$$\binom{13}{3}\cdot 2\cdot\binom{10}{3}=2\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}.$$

5. Vi betraktar en graf G med 41 noder. Valensen hos 18 av noderna är 1, 18 noder har valensen 2, och resterande fem noder har valensen 4.

   (a) (1p) Bestäm antalet kanter i G.

   Lösning: Sambandet $\sum_{i=1}^{|V|}\delta(v_i) = 2\cdot|E|$, där $|V|$ betecknar antalet noder $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ och $|E|$ antalet kanter, ger

$$18\cdot 1+18\cdot 2+5\cdot 4=2\cdot|E|$$

   och således är antalet kanter lika med

   Svar: 37.

   (b) (1p) Kan G ha ett spännande delträd? Motivera ditt svar.

   Lösning: Nej, ty ett spännande träd till grafen skulle innehålla precis $41-1$, dvs 40 kanter valda bland kanterna i G. Så många kanter har inte G.

   (c) (1p) Förklara varför G inte kan vara sammanhängande.

   Lösning: Varje sammanhängande grafe har ett spännande delträd.

DEL II

6. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de tre talen 1980, 1680 och 1188.

   Lösning: Om D är den största gemensamma delaren till de tre talen gäller att $D \mid 1980$ och $D \mid 1680$ och därmed att $D \mid sgd(1680, 1980)$. Vi bestämmer nu med hjälp av Euklides algoritm $sgd(1680, 1980)$:

1980	=	$1 \cdot 1680$	+	300
1680	=	$6 \cdot 300$	-	120
300	=	$3 \cdot 120$	-	60
120	=	$2 \cdot 60$	+	0

Således är $sgd(1980, 1680) = 60$. Nu vet vi att det sökta talet D delar 60. Med D skall också dela 1188. Då kommer D att dela $sgd(1188, 60)$ som nu bestäms

1188	=	$20 \cdot 60$	-	12
60	=	$5 \cdot 12$	+	0

Den eftersökta största gemensamma delaren D till de tre talen måste alltså dela talet 12. Men talet 12 delar samtliga de tre givna talen och är då den största gemensamma delaren.

Svar: 12

7. (4p) Betrakta den kompletta (fullständiga) grafen K_{16}. Den grafen har ingen Eulerkrets. Hur många kanter måste man minst ta bort för att få en graf som har en Eulerkrets?

   (Antalet poäng på denna uppgift, beräknas utifrån hur pass nära du kommer det minsta antalet kanter som måste tas bort och hur pass väl du motiverat din lösning. Enbart ett korrekt svar ger inte full poäng på denna uppgift.)

   Lösning: En graf har en Eulerkrets precis då varje nod har en jämn valens. Varje nod i K_{16} har valensen 15. Minst en kant från varje nod måste avlägsnas för att en Eulerkrets skall uppstå. Mellan varje par av noder i K_{16} finns precis en kant. Vi delar in de 16 noderna i åtta disjunkta par, dvs om noderna är $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{16}$ bildar vi paren

   $$\{v_1, v_2\},\ \{v_3, v_4\},\ \{v_5, v_6\},\ \ldots,\ \{v_{15}, v_{16}\}$$

   och tar sedan bort kanterna mellan v_1 och v_2, mellan v_3 och v_4 osv. Så det minsta antal kanter som måste tas bort är 8 och detta antal räcker.

8. (4p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer:

   $$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Undersök om det finns någon permutation x sådan att $x\varphi x^3 = \psi$.

   Lösning: Vi skriver först permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler:

   $$\varphi = (1\ 4\ 5\ 3)(2\ 6) \quad \text{och} \quad \psi = (1)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$$

   och därefter som produkter av transpositioner, t ex:

   $$\varphi = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 4)(2\ 6) \quad \text{resp} \quad \psi = (1)(2\ 5)(2\ 4)(3\ 6).$$

   Tydligen är φ en jämn permutation. Oavsett om x är udda eller jämn så kommer $x\varphi x^3$ att vara en jämn permutation, som ju aldrig kan vara lika med den udda permutationen ψ. Det finns ingen permutation x som löser ekvationen.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i beviset.

9. (5p) Det flyger k duvor mot n reden. Duvorna väljer reden slumpvis och helt oberoende av hur de andra duvorna väljer sina reden. Om k är mindre än eller lika med n, $k \leq n$, hur stor är då sannolikheten att minst ett rede innehåller minst två duvor.

   Lösning: Det finns totalt n^k olika sätt för de k duvorna att placera sig på i redena och alla dessa sätt är lika sannolika. Antalet sätt där varje rede innehåller högst en duva är $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, ty var och en av de k duvorna skall då välja ett eget rede. Den första duvan har då n redan att välja bland, den andra $n-1$ redan att välja bland osv. Av de n^k stycken olika fördelningarna blir antalet fördelningar där minst ett rede innehåller två duvor lika med

$$n^k - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

   Eftersom alla fördelningar är lika sannolika så blir den sökta sannolikheten lika med

   Svar:

$$\frac{n^k - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

10. Ett element y är en jämn kvadrat i en ring Z_n om det finns ett element x i Z_n sådant att $y = x^2$.

    (a) (2p) Låt p vara ett primtal. Bestäm antalet olika jämna kvadrater i ringen Z_p.

    lösning: Vi betraktar mängden $Q = \{x^2 \mid x \in Z_p\}$. Vi observerar $x^2 = y^2$ precis då $p|x^2 - y^2$. Eftersom $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ så gäller att

$$x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad p|(x-y)(x+y) \quad \Rightarrow \quad p|(x-y) \quad \text{eller} \quad p|(x+y)$$

    Vi räknar i ringen Z_p och har då från ovanstående att

$$x - y \equiv_p 0 \quad \text{dvs} \quad x \equiv_p y \qquad \text{eller} \qquad x + y \equiv_p 0 \quad \text{dvs} \quad x \equiv_p -y.$$

    Det gäller alltså att Q, om p är ett udda primtal, består av de $(p+1)/2$ olika elementen

$$0^2 = 0, 1^2 = (-1)^2, 2^2 = (-2)^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2 = (\frac{p+1}{2})^2.$$

    Ringen Z_2 har två jämna kvadrater elementen 0 och 1. Alltså

$$|Q| = \begin{cases} 2 & \text{om} \qquad\qquad\qquad p = 2 \\ \frac{p+1}{2} & \text{om } p \text{ primtal och} \quad p \neq 2. \end{cases}$$

    (b) (3p) Antag $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ där talen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är olika primtal. Bestäm antalet jämna kvadrater i ringen Z_n.

    lösning: Vi använder oss av att Z_n är isomorf med den direkta produkten av ringar $Z_{p_1} \times Z_{p_2} \times \ldots \times Z_{p_k}$. Vid denna isomorfi gäller att

$$x \quad \longleftrightarrow \quad (x(mod\, p_1), x(mod\, p_2), \ldots, x(mod\, p_k))$$

    och speciellt

$$x^2 \quad \longleftrightarrow \quad (x^2(mod\, p_1), x^2(mod\, p_2), \ldots, x^2(mod\, p_k))$$

Låt nu Q_i, för $i = 1, 2, \ldots, k$ beteckna kvadraterna i ringen Z_{p_i}. Då får vi från ovanstående ekvation att

$$|Q| = |Q_1| \cdot |Q_2| \cdot \ldots \cdot |Q_k|,$$

där Q betecknar kvadraterna i ringen Z_n. Således

Svar: Antalet kvadrater i ringen $Z_{p_1 p_2 \ldots p_k}$ är lika med

$$|Q| = \begin{cases} \frac{2}{2^{k-1}} \prod_{i=2}^{k} (p_i + 1) & \text{om} \quad p_1 = 2 \\ \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k} (p_i + 1) & \text{om} \quad p_i \neq 2 \text{ för } i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases}$$