Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 2 D2 och F, vt08.

1. Förutsätter att $n \geq 3$. Antalet färger som behövs är minst n eftersom en av noderna har valens n och alla kanter från den noden måste ha olika färg, färgerna 1, 2, 3, ..., n. Andra ändpunkten av dessa kanter är noderna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ respektive.

   Vi färglägger nu resterande kanter enligt följande:

   Kanten v_1v_2 får färgen 3.

   Kanten v_2v_3 får färgen 4.

   etc...

   Kanten $v_{n-1}v_n$ får färgen 1.

   Kanten v_nv_1 får färgen 2.

2. Ett träd har inga cykler och därför inga cykler av udda längd och varje graf som saknar cykler av udda längd är bipartit enligt känd sats.

3. Vi delar in de sju noderna i K_7 i två delmängder X oh Y och vi tillåter inga kanter mellan noderna i X och inga kanter mellan noderna i Y. Så vi måste ta bort kanter i K_7 som går mellan noderna i X och de kanter som går mellan noderna i Y. Om X innehåller x noder kommer Y att innehålla $7 - x$ stycken noder och antalet kanter som skall tas bort blir då minst

   $$(x-1) + (x-2) + ... + 1 = \binom{x}{2}$$

   som är antalet kanterna i K_7 mellan noderna i X och

   $$(7-x-1) + (7-x-2) + ... + 1 = \binom{7-x}{2}$$

   mellan noderna i Y. Totala antalet kanter som måste tas bort är då minst

   $$f(x) = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{(7-x)(7-x+1)}{2}.$$

   Minimerar vi denna funktion t ex med hjälp av derivata ser vi att minimu inträffar när $x = 3.5$ Eftersom x är ett heltal har vi i vårt fall har vi ett minimum när $x = 4$ (eller $x = 3$). Antalet kanter att ta bort blir då

   $$\binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9.$$

4. Visar först att grafen är sammanhängande. En av noderna har valens 6 och den noden och dess sex grannar tillhör samma komponent eftersom det finns en stig mellan varje par av dessa noder. Återstår två noder. Om dessa två noder inte tillhör samma komponent som de övriga sju så kommer dessa noder båda antingen

ha valens ett, om de har en kant mellan sig, eller valens noll, om de ej är förbundna med en kant. Dock inträffar ej detta fall emedan ingen av noderna har valens ett eller noll. Alltså är alla kanter förbundna med varandra med en stig och grafen är sammanhängande.

För att bestämma antalet områden behöver vi veta antalet kanter. Vet att valenssumman är två gånger antalet kanter och får då att antalt kanter e är lika med

$$2e = 4+3+3+4+3+6+3+2+4 = 32 \quad \Rightarrow \quad e = 16.$$

Använder vi Eulers formel $v + r = e + 2$ får vi

$$r = e + 2 - v = 16 + 2 - 9 = 9.$$

5. Låt v, e och r beteckna antalet noder, antalet kanter respektive antalet områden.

   Om varje nod har en valens av minst 4 så kommer valenssumman att vara minst lika med $4v$ och således gäller att

$$2e \geq 4v \quad \text{dvs} \quad v \leq \frac{1}{2}e.$$

   Varje kant gränsar till precis två områden och, eftersom varje cykel har en längd av minst 7, så gäller att

$$7r \leq 2e \qquad \text{dvs} \qquad r \leq \frac{2}{7}e.$$

   (För att inse detta faktum betrakta en $e \times r$ matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \cdots & a_{er} \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kanten } e_i \text{ gränsar till området } r_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

   Radsummorna blir precis två och kolonnsummorna minst sju. Totalka antalet ettor i matrisen är då dels $2e$ och dels minst $7r$.)

   Eulers formel ger nu att

$$e = v + r - c - 1 \leq \frac{1}{2}e + \frac{2}{7}e - c - 1,$$

   dvs

$$5e \leq 14(-c-1),$$

   vilket ju är orimligt.

6. Pojknoden B är omatchad men hans grannod flickan c är matchad med pojken A vars granne flickan a är omatchad. Stigen

$$B \; - \; c \; - \; A \; - \; a$$

   är en alternerande stig till matchningen M.

7. Vi finner att unionen av fyra av mängderna innehåller bara tre element, nämligen

$$|A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |\{2,3,4\}| < 4,$$

   så Halls villkor är ej uppfyllt och en transversal saknas.