Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till några övningar inför lappskrivning nummer 4, Diskret matematik för D2 och F, vt08.

1. 20 identiska bollar skall delas ut till fem flickor och fem pojkar. På hur många olika sätt kan detta ske om

   (a) varje barn skall få minst en boll.

   (b) pojkarna får dela på 10 bollar och flickorna på 10 bollar.

   Lösning a) Vi betraktar 20 identiska objekt som skall placeras i 10 olika lådor. Enligt välkända sammanhang kan utdelning ske på

   $$\binom{10+10-1}{10-1} = \binom{19}{9},$$

   olika sätt.

   b)
   Op 1: Dela ut 10 bollar till de fem flickorna. Antal sätt är

   $$n_1 = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4}.$$

   Op 2. Dela ut 10 bollar till pojkarna. Går på lika många sätt, så

   $$n_2 = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4}.$$

   Totala antalet sätt blir produkten av dessa tal och därmed
   SVAR: $\binom{14}{4}^2$.

2. 15 likadana bullar och 17 likadana kakor skall fördelas bland sju barn. På hur många sätt kan detta ske om

   (a) varje barn får minst en av varje sort.

   (b) inget barn får fler än fem av varje sort.

   Lösning a) Op 1. Dela ut en bulle och en kaka till alla barn. Antal möjligheter är då

   $$n_1 = 1.$$

   Op 2. Fördela åtta bullar bland de sju barnen vilket går på

   $$n_2 = \binom{8+7-1}{7-1} = \binom{14}{6}$$

   olika sätt.

   Op 2. Dela ut 10 kakor, vilket går på

   $$n_3 = \binom{10+7-1}{7-1} = \binom{16}{6}$$

olika sätt.

Totala antalet sätt att dela ut kakorna på är då

$$\binom{14}{6}\binom{16}{6},$$

vilket är svaret.

b) Vi använder oss av inklusion exklusion. Låt A_i vara de utdelningar av bullar där barn nummer i, för $i = 1, 2, \ldots, 7$ får minst sex av bullar. Då gäller att, om vi låter barn nummer i få sex bullar och sedan delar ut resterande 9 bullar att

$$|A_i| = \binom{9+7-1}{7-1} = \binom{15}{6} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

På samma sätt att

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \binom{3+7-1}{7-1} = \binom{9}{6}, \qquad i_1 \neq i_2.$$

Det inträffa aldrig att tre barn får minst sex bullar. Alltså med restriktionen att inga barn får fler än fem bullar blir antalet möjliga bullutdelningar lika med

$$n_1 = \binom{15+7-1}{7-1} - 7 \cdot \binom{15}{6} + \binom{7}{2}\binom{9}{6}.$$

Med liknande argument får vi atta antalet kakutdelningar blir

$$n_2 = \binom{17+7-1}{7-1} - 7 \cdot \binom{17}{6} + \binom{7}{2}\binom{11}{6}.$$

Så

SVAR:

$$(\binom{21}{6} - 7 \cdot \binom{15}{6} + \binom{7}{2}\binom{9}{6}) \cdot (\binom{23}{6} - 7 \cdot \binom{17}{6} + \binom{7}{2}\binom{11}{6}).$$

3. Hur många ord kan man bilda med hjälp av bokstäverna AGDABE om B:et inte får stå precis efter G:et, D:et inte får stå precis efter B:et och A:na inte får stå bredvid varandra.

Lösning: Om vi bortser från otillåtna ord finns totalt $\binom{6}{2,1,1,1,1} = 360$ antal ord. Från detta antal skall vi dra ifrån antalet otillåtna ord. Låt X beteckna de ord som innehåller ett B precis efter ett G, Y beteckna mängden ord som innehåller precis ett D precis efter ett B och Z de ord som innehåller två A:n precis bredvid varandra. Vi kommer att använda principen om inklusion och exklusion.

För att beräkna antalet ord i mängden X tänker vi oss bokstäverna som bokstavsklossar där bokstäverna G och B klistras ihop till en bokstav GB. Då har vi bokstäverna A,A,GB,D,E att använda och vi finner att

$$|X| = \binom{5}{2,1,1,1} = 60.$$

På samma sätt får vi

$$|Y| = \binom{5}{2,1,1,1} = 60, \qquad |Z| = 5! = 120.$$

När vi bestämmer $|X \cap Y|$ klistrar vi ihop G, B och D till klossen GBD och får då klossarna A,A,GBD,E och att

$$|X \cap Y| = \binom{4}{2,1,1} = 12.$$

På samma sätt

$$|X \cap Z| = 4! = 24, \qquad |Y \cap Z| = 4! = 24, \qquad |X \cap Y \cap Z| = 3! = 6.$$

Så

SVAR: $360 - 60 - 60 - 120 + 12 + 24 + 24 - 6 = 174$.

4. Sju röda, fem gula och tre vita klossar skall man använda för att bygga torn av. På hur många sätt kan detta ske om

   (a) man skall bygga ett torn med höjden 15.

   (b) man skall bygga tre torn alla med höjd fem.

   (c) man skall bygga precis tre torn.

Lösning (a): Vi skall ur de 15 olika positionerna i höjdled, välja ut sju positioner till de röda klossarna, fem till de gula klossarna och tre positioner i höjdled till de vita klossarna. Vi skall alltså ur en mängd med 15 element välja ut tre etiketterade delmängder med etiketterna röd, gul resp vit vardera med 7, 5 resp 3 element. Antalet möjliga sätt detta kan ske på är

SVAR: $\binom{15}{7,5,3}$.

Lösning (b): Placera tornen du bygger bredvid varandra. Sedan tar du och ställer tornen ovan på varandra i en av dig vald ordning. Varje sätt att bygga tre torn på svarar då entydigt mot precis ett torn av höjd 15, så svaret på denna deluppgift blir precis detsamma som på deluppgift (a), dvs

SVAR: $\binom{15}{7,5,3}$.

Lösning (b): Gör som i uppgift (b) bygg tornen bredvid varandra och ställ sedan dessa ovanpå varandra men lägg en markör t ex ett papper mellan de olika tornen när du ställer dem ovanpå varandra. Varje tornuppställning svarar då entydigt mot precis ett torn av höjd 15 försett med två markörer på två olika höjder. Om klossarna har höjden t ex 1 dm så hamnar markörerna på två olika höjder av de möjliga höjderna 1 dm , 2 dm , 3 dm, ..., 14 dm. Så

Op 1. Bygg ett torn av höjd 15. Antal möjliga sådana är $n_1 = \binom{15}{7,5,3}$.

Op 2. Placera ut två markörer. Antal sätt är $n_2 = \binom{14}{2}$.

Enligt multiplikationsprincipen har vi då svaret

SVAR :

$$\binom{15}{7,5,3} \cdot \binom{14}{2}.$$

5. Sju flickor och nio pojkar skola delas in i grupper, varje barn i precis en grupp. På hur många sätt kan detta ske om

   (a) en grupp består av 3 flickor och 3 pojkar, en grupp består av 2 flickor och 4 pojkar samt en grupp består av 2 flickor och 2 pojkar.

   (b) två av grupperna består av 2 flickor och 2 pojkar.

Lösning (a): Vi kan etikettera grupperna. Grupp $(3,3)$ består av 3 pojkar och 3 flickor, grupp $(2,4)$ består av 2 flickor och 4 pojkar och grupp $(2,2)$ består av 2 flickor och 2 pojkar. Antalet sätt att utse flickor och pojkar till grupperna ges då av multinomialkoefficienter.

Op 1: Utse flickorna på $n_1 = \binom{7}{3,2,2}$ olika sätt.

Op 2: Utse pojkarna på $n_1 = \binom{9}{3,4,2}$ olika sätt.

Enligt multiplikationsprincipen blir totala antalet sätt att utse grupper

SVAR: $\binom{7}{3,2,2} \cdot \binom{9}{3,4,2}$

Lösning (b): Vi utgår ifrån att fortfarande skall man välja tre grupper. Med samma etikettering som ovan får nu två grupper samma etikett $(2,2)$. Om vi etiketterar dessa med $(2,2,A)$ resp $(2,2,B)$ skulle antalet möjliga sätt att utse dessa grupper vara

$$\binom{7}{3,2,2} \cdot \binom{9}{5,2,2}.$$

För varje val av två grupper med vardera 2 flickor och 2 pojkar finns det 2! olika sätt att sätta ut etiketter så om svaret på frågan är talet x så skulle

$$x \cdot 2! = \binom{7}{3,2,2} \cdot \binom{9}{5,2,2}.$$

Vi har alltså

SVAR:

$$x = \frac{1}{2!}\binom{7}{3,2,2} \cdot \binom{9}{5,2,2}.$$

6. Hur många ord av längd nio kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet IALLAFALL, samt hur många möjliga ord kan man bilda om bokstaven L varken får stå först eller sist och bokstaven I varken på plats nummer 4 eller 6.

Lösning : Vi använder principen om inklusion exklusion. Låt A_1 beteckna mängden av ord med ett L i posiiton 1, A_9 mängden av ord med ett L i position 9, A_4 mängden av ord med ett I i position 4 och A_6 mängden av ord med ett I i position 6.

Totala antalet ord, om vi medräknar otillåtna ord, är

$$\binom{9}{4,3,1,1},$$

eftersom vi skall välja fyra postioner av nio till bokstaven L, tre positioner till bokstaven A etc. De otillåtna orden finns samtliga i mängderna A_1, A_4, A_6 och A_9, så svaret ges av talet

$$\binom{9}{4,3,1,1} - |A_1 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_9|.$$

Enligt formeln för inklusion exklusion kan vi bestämma antalet element i unionen, men hjälpa av information om antalet element i alla möjliga snitt av mängderna A_1, A_4, A_6 och A_9. Detta är tämligen lätt att beräkna, t ex för att bestämma $A_1 \cap A_4$ placerar vi först ut ett L i position 1 och sedan ett I i position 4. Återstår då att till sju positioner placera ut bokstäverna L, L, L, F, A, A, A, så

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{7}{3,1,3}.$$

Vi får med samma sätt att tänka

$$|A_1| = |A_9| = \binom{8}{3,3,1,1}, \qquad |A_4| = |A_6| = \binom{8}{4,3,1},$$

$$|A_1 \cap A_9| = \binom{7}{2,3,1,1}, \qquad |A_4 \cap A_6| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_4| = |A_1 \cap A_6| = |A_9 \cap A_4| = |A_1 \cap A_6| = \binom{7}{3,3,1},$$

$$|A_1 \cap A_4 \cap A_6| = |A_9 \cap A_4 \cap A_6| = 0, \quad |A_1 \cap A_4 \cap A_9| = |A_1 \cap A_6 \cap A_9| = \binom{6}{2,3,1},$$

$$|A_1 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_9| = 0.$$

Med hjälp av formeln för inklusion exklusion får vi nu

SVAR:

$$\binom{9}{4,3,1,1} - 2\binom{8}{3,3,1,1} - 2\binom{8}{4,3,1} + \binom{7}{2,3,1,1} + 4\binom{7}{3,3,1} - 2\binom{6}{2,3,1}.$$

7. Nio pojkar och åtta flickor skola ställa sig på ett led. På hur många sätt kan detta ske om
   (a) mellan var pojke skall stå precis en flicka.
   (b) mellan varje pojke skall stå högst en flicka.

Lösning (a): Op 1: Ställ pojkarna på ett led. Antal möjligheter är $n_1 = 9!$.

Op 2: Ställ flickorna på ett led. Antal möjligheter är $n_2 = 8!$.

Op 3: Placera in flickorna i den ordning de står mellan pojkarna. Antal möjligheter är $n_3 = 1$.

Enligt multiplikationsprincipen har vi

SVAR: $9! \cdot 8!$.

Lösning (b): Gör som i uppgift (a) men några av flickorna skall stå före pojkarna och några efter. Om i flickor skall stå före och j flickor efter så skall $8-(i+j)$ flickor placeras in mellan de 9 pojkarna. Vi skall alltså bland de åtta mellanrummen välja ut $8-(i+j)$ stycken till flickor. Detta kan ske på

$$n_4 = \binom{8}{8-i-j},$$

olika sätt. Vi får alltså en mängd olika fall. Låt $F_{i,j}$ beteckna antalet möjligheter när i flickor står före och j flickor efter. Då gäller att

$$F_{i,j} = 9! \cdot 8! \cdot \binom{8}{8-i-j},$$

och att svaret ges av summan av alla möjligheter i allafall, dvs

$$\sum_{(i,j);i+j\leq 8} F_{i,j}.$$

Så

SVAR:

$$\sum_{(i,j);i+j\leq 8} 9! \cdot 8! \cdot \binom{8}{8-i-j}.$$