Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 5, Diskret matematik för D2 och F, vt08.

1. Beräkna Stirlingtalet $S(6,4)$.

   Lösning Vi använder att $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ samt att $S(n,1) = 1$ och $S(n,n) = 1$ och finner

$$\begin{array}{rcl} S(6,4) & = & S(5,3) + 4S(5,4), \\ S(5,4) & = & S(4,3) + 4S(4,4), \\ S(5,3) & = & S(5,2) + 3S(4,3) \\ S(4,3) & = & S(3,2) + 3S(3,3) \\ S(5,2) & = & S(4,1) + 2S(4,2) \\ S(4,2) & = & S(3,1) + 2S(3,2) \\ S(3,2) & = & S(2,1) + 2S(2,2) \end{array}$$

   Utnyttjar vi nu att $S(n,1) = 1$ och $S(n,n) = 1$ så får vi

$$\begin{array}{rcccl} S(3,2) & = & 1+2 & = & 3, \\ S(4,2) & = & 1+2\cdot 3 & = & 7, \\ S(5,2) & = & 1+2\cdot 7 & = & 15, \\ S(4,3) & = & 3+3\cdot 1 & = & 6, \\ S(5,3) & = & 15+3\cdot 6 & = & 33, \\ S(5,4) & = & 6+4\cdot 1 & = & 10, \\ S(6,4) & = & 33+4\cdot 10 & = & 73. \end{array}$$

2. Bestäm antalet sätt att fördela 6 olika hundar och 6 olika katter bland fyra familjer så att varje familj får minst en hund och minst en katt.

   Lösning Dela in hundarna i fyra icketomma högar vilket går på $S(6,4) = 73$ olika sätt. Sen får familjerna i turordning välja en av högarna vilket går på $4! = 24$ olika sätt. Sedan utförs samma operation på katterna. Multiplikationsprincipen ger nu svaret

   SVAR: $(S(6,4)4!)^2 = (73 \cdot 24)^2 = 3069504$.

3. Skriv nedanstående permutation som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Lösning $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 7$ och $\varphi(7) = 1$ ger en av cyklerna $(1\ 2\ 3\ 7)$. Vidare $\varphi(4) = 5$, $\varphi(5) = 6$ och $\varphi(6) = 4$ vilket ger den andra cykeln $(4\ 5\ 6)$. Så

   SVAR: $(1\ 2\ 3\ 7)(4\ 5\ 6)$.

4. Skriv som en produkt av disjunkta cykler

$$\psi = (1\ 3\ 2)(2\ 3\ 4)(4\ 6\ 7)(4\ 5).$$

   Lösning Vi betraktar ψ som en sammansättning av fyra permutationer

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen av dessa permutationer enligt $\psi(i) = \psi_4(\psi_3(\psi_2\psi(i)))$ blir då permutationen med tablån

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Som ovan får vi då

SVAR: $\psi = (1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.

5. Bestäm ordningen av permutationen ψ ovan.

   Lösning Ordningen på en permutation ψ blir minsta gemensamma multipeln av längderna av permutationens disjunkta cykler. Alltså

   SVAR: 6.

6. Är permutationen ψ ovan udda eller jämn?

   Lösning Permutationen ψ är en produkt av tre jämna permutationer och en udda permutation och är dárfór en udda permutation.

7. Låt $\gamma = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6\ 7)$ och $\delta = (1\ 4\ 3)(2\ 5\ 7\ 6)$. Bestäm en permutation ψ sådan att $\gamma = \psi^{-1}\delta\psi$ eller visa att en sådan permutation inte finns.

   Lösning Vi placerar permutationerna ovanför varandra i en tablå att att cykler av samma längd hamnar precis ovanför varandra och så att γ är överst. Tablån blir då permutationstablån för den sökta permutationen ψ:

$$\psi = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right),$$

   eller hyfsat

$$\psi = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right),$$

   med ett svar som på cykelform är

   SVAR: $\psi = (2\ 4\ 3)(6\ 7)$.

8. Låt γ och δ vara som ovan. Bestäm en permutation x sådan att $\gamma = x\delta$.

   Lösning Vi får att, med räkningar som i uppgift 5, att

$$x = \gamma\delta^{-1} = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6\ 7)(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 7\ 5) = (1\ 5\ 4\ 2\ 7\ 6\ 3).$$

9. (a) Visa att om ψ är en udda permutation så saknar ekvationen $x^2 = \psi$ lösningar.

   Lösning Om x kan skrivs som en produkt av t transpositioner γ_1, γ_2, ..., γ_t enligt nedan

$$x = \gamma_1\gamma_2 ... \gamma_t,$$

   så kan x^2 skrivas som en produkt av ett jämnt antal transpositioner, nämligen $2t$ transpositioner

$$x^2 = \gamma_1\gamma_2 ... \gamma_t \cdot \gamma_1\gamma_2 ... \gamma_t,$$

   och är därför jämn.

(b) Om ψ är en jämn permutation är då alltid ekvationen $x^2 = \psi$ lösbar?

Lösning Vi visar att även om ψ är jämn behöver inte ekvationen $x^2 = \psi$ vara lösbar. Betrakta permutationen $\psi = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ på mängden $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Då

$$\psi = (1\ 2)(3\ 6)(3\ 5)(3\ 4),$$

så är ψ en jämn permutation. Antag nu att permutationen x är sådan att $x^2 = \psi$. Eftersom $\psi^4 = id$ så gäller då att $x^8 = id$. Nästa steg i vårt bevis är att visa att x har ordning 8 dvs $k = 8$ är det minsta naturliga tal k sådant att $x^k = id$.
Först har vi att

$$x^2 = \psi \neq id, \qquad x^4 = \psi^2 = (3\ 5)(4\ 6) \neq id.$$

Om $x^7 = id$ skulle, då x^8 är lika med id,

$$x^7 = x^8 \qquad \Rightarrow \qquad x^7 \cdot (x^{-1})^7 = x^8 \cdot (x^{-1})^7 \qquad \Rightarrow \qquad id = x.$$

Vidare, om $x^3 = id$ skulle $(x^3)^3 = id^3 = id$ och då skulle $x^9 = x^8$ och därmed $x = id$. På samma sätt kan vi utesluta alla andra möjligheter för ordningen av x än att x är av ordning 8.

Om en permutation x av $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ skall ha ordning 8, och är av typen

$$[1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} 4^{n_4} 5^{n_5} 6^{n_6}],$$

så måste

$$n_3 = 0, \qquad n_5 = 0, \qquad n_6 = 0,$$

eftersom ordningen av en permutation är minsta gemensamma multipeln av längden av de dsijunkta cykler som beskriver permutationen. Inte heller någon permutation av typen

$$[1^{n_1} 2^{n_2} 4^{n_4}],$$

har ordning 8.