Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 6, Diskret matematik för D2 och F, vt08.

1. Det går att fylla i nedanstående tabell så att den blir multiplikationstabellen till en grupp. Gör detta.

   Lösning:

$\circ$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

   (a) Ange gruppens identitetselement.

   Lösning: a

   (b) Är gruppen abelsk.

   Lösning: Nej ty multiplikationstabellen är inte symmetrisk runt den sk huvuddiagonalen.

   (c) Bestäm inverser till alla element.

   Lösning: $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$, $f^{-1} = g$ och $g^{-1} = f$.

   (d) Bestäm ordningen av alla element.

   Lösning: $\sigma(a) = 1$, $\sigma(b) = 2$, $\sigma(c) = 2$, $\sigma(d) = 2$, $\sigma(f) = 3$, $\sigma(g) = 3$, ty t ex $f \circ f = g$ och $f \circ f \circ f = a$.

   (e) Beräkna $b \circ c \circ d \circ f \circ g$.

   Lösning: $b \circ c \circ d \circ f \circ g = b \circ c \circ d \circ a = b \circ c \circ d = b \circ g = c$

   (f) Bestäm delgrupper med två respektive tre element.

   Lösning: Tar element av ordning två respektive tre och låter dessa generera cykliska grupper. De möjliga delgruppern blir då $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, f, g = f \circ f\}$.

   (g) Bestäm vänster och höger sidoklasser till de delgrupper du fann ovan.

   Lösning: $\{a, b\}$ har höger sidoklasserna $\{a, b\}$, $\{a \circ c, b \circ c\} = \{c, g\}$, $\{a \circ d, b \circ d\} = \{d, f\}$ och vänster sidoklasser $\{a, b\}$, $\{c \circ a, c \circ b\} = \{c, f\}$, $\{d \circ a, d \circ b\} = \{d, g\}$. och så vidare.

2. Visa att $G = (Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är en grupp och bestäm ordningen av samtliga element i G.

   Lösning: Associativa lagen gäller allmänt vid multiplikation i Z_{13} och därför också i G. Identitetselement finns nämligen elementet 1 och alla element i G är inverterbara eftersom 13 är ett primtal och alla icke noll element i Z_{13} då är relativt prima till 13. G består alltså av de inverterbara elementen i Z_{13}. Produkten av inverterbara element är ett inverterbart element och således är G sluten med avseende på multiplikation. Vi har nu visat att G är en grupp.

Nu till ordningen av elementen. Vi börjar med elementet 2. Vi vet att $\sigma(2) \mid 12$ eftersom G har 12 element. Vi finner att $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 8 \neq 1$, $2^4 = 3 \neq 1$, $2^6 = 12 \neq 1$. Alltså kan vi dra den slutsatsen att $\sigma(2) = 12$ och att G genereras av elementet 2.

Vi kan nu gå igenom samtliga övriga 11 element på samma sätt för att bestämma dessa elements ordningar. Men vi kan också utnyttja att elementet 2 genererar hela gruppen, dvs

$$G = \{1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 3, 2^5 = 6, 2^6 = 12, 2^7 = 11, 2^8 = 9, 2^9 = 5, 2^{10} = 10, 2^{11} = 7\}.$$

Om vi nu utnyttjar att

$$2^{12} = 1$$

så får vi att $3 = 2^4$ har ordning 3, $4 = 2^2$ har ordning 6, $5 = 2^9$ har ordning 4, $6 = 2^5$ har ordning 12, $7 = 2^{11}$ har ordning 12, $8 = 2^3$ har ordning 4, $9 = 2^8$ har ordning 3, $10 = 2^{10}$ har ordning 6, $11 = 2^7$ har ordning 12, och $12 = 2^6$ har ordning 2.

Ty t ex $9^3 = (2^8)^3 = 2^{24} = 1$.

3. Gruppen H är en delgrupp till en grupp G. Antag H består av 13 element och att det finns 7 sidoklasser till H i G.

   (a) Hur många element består då G av.

   Lösning: Sidoklasserna delar in gruppen i disjunkta delmängder som är lika stor som delgruppen. Alltså är antalet element i G lika med

   $$|G| = 13 \cdot 7 = 91.$$

   (b) Ge exempel på en grupp G med en delgrupp H som uppfyller dessa förutsättningar.

   Lösning: Tag $(Z_{91}, +)$ och låt $H = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84\}$.

4. Visa att $(Z_{10}, +)$ är isomorf med $(Z_2, +) \times (Z_5, +)$.

   Lösning: Båda grupperna är cykliska med en generator 1 respektive $(1, 1)$. Vi definierar φ från $(Z_{10}, +)$ till $(Z_2, +) \times (Z_5, +)$ genom

   $$\varphi(k) = (k(\text{mod } 2), k(\text{mod } 2)).$$

   Då gäller att $\varphi(k)$ är en bijektion, pga Kinesiska restsatsen, samt att

   $$\varphi(k_1 + k_2) = ((k_1 + k_2)(\text{mod } 2), (k_1 + k_2)(\text{mod } 2)) =,$$

   $$(k_1(\text{mod } 2), k_1(\text{mod } 2)) + (k_2(\text{mod } 2), k_2(\text{mod } 2)) = \varphi(k_1) + \varphi(k_2)$$

   alltså är φ en isomorfi och grupperna är isomorfa.

---

5. Undersök om det går att fylla i nedanstående tabell så att den blir multiplikationstabellen till en grupp.

$\circ$	a	b	c	d	f	g	h
a		b					
b		a					
c							
d							
f							
g							
h							

Lösning: Eftersom $a \circ b = b$ så måste a vara gruppens identitetselement. Det gäller också då att $b \circ b = a$ så ordningen av b måste vara två. Men eftersom gruppen har sju element så delar inte ordningen av elementet b antalet element i gruppen vilket strider mot ett av påståendena för grupper. Alltså finns ingen grupp tabell sådan att $a \circ b = b$ och $b \circ b = a$.

6. En grupp G har delgrupper H och K med vardera 15 respektive 21 element. Vilka möjligheter finns det för antalet element i G.

   Lösning: Enligt Lagranges sats måste både antalet element i H och antalet element i K dela antalet element G, dvs $15 \mid |G|$ och $21 \mid |G|$ vilket leder till att $105 \mid |G|$.

   Låt nu $G_1 = (Z_{105}, +)$. Den har delgrupperna

$$H = \{0, 7, 14, 21, \ldots, 98\} \qquad \text{och} \qquad K = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots, 100\}$$

   med respektive 15 och 21 element.

   Låt nu G_2 vara vilken annan grupp som helst med identiteslementet e och låt

$$G = G_1 \times G_2.$$

   Då gäller att antalet element i G är $|G_1| \cdot |G_2|$ dvs

$$|G| = 105|G_2|$$

   och att G har följande delgrupper med respektive 15 och 21 element.

$$H \times \{e\} \qquad \text{och} \qquad K \times \{e\}.$$

   SVAR: Om och endast om $|G| = 105n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, finns en grupp G med delgrupper om 15 respektive 21 element.

7. Gruppen S_4 består av samtliga permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (a) Bestäm den minsta delgrupp till S_4 som innehåller elementen (1 2 3) och (2 3).

   Lösning: En delgrupp som innehåller element av ordning två och tre måste ha en ordning, dvs antalet element i gruppen, som delas av både tre och två. Det minsta sådant tal är sex. Vi vet att gruppen S_3 av permutationer på mängden $\{1, 2, 3\}$ innehåller de tre permutationerna och har precis sex element. Alltså är S_3 den sökta delgruppen.

   (b) Bestäm den minsta delgrupp till S_4 som innehåller elementen (1 2 3) och (3 4).
   Lösning: Multiplicerar vi ihop de bägge permutationerna får vi (1 2 3 4) som har

   ordning 4. Eftersom S_4 har 24 element så är de enda möjliga storlekarna på grupper till S_4, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 och 24 element. Den sökta delgruppen innehåller element av ordningarn 2, 3 och 4. Alltså finns bara två alternativ kvar: 12 eller 24 element. Man kan nu resonera på tre sätt:

   1: Om man råkar veta att S_4 bara har en delgrupp med 12 element, nämligen mängden A_4 av alla jämna permutationer, och då är man klar, eftersom (3 4) är en udda permutation och alltså inte ligger i A_4 så måste den minsta delgrupp som innehåller de givna elementen vara S_4.

   2: Man visar att S_4 bara har en delgrupp med 12 element och fortsätter som ovan.

   3: Man genererar elementen i S_4 med hjälp av de givna permutationerna. Man finner t ex att

$$(1\ 2\ 3)(3\ 4)(1\ 3\ 2) = (1\ 4),$$

$$(1\ 3\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3) = (2\ 4),$$

nu vet vi att delgruppen måste innehålla tvåcyklerna (4 3), (4 2) och (4 1). Vi finner då att i delgruppen finns även

$$(4\ 3)(4\ 2)(4\ 3) = (2\ 3), \qquad \text{och} \qquad (4\ 3)(4\ 1)(4\ 3) = (1\ 3),$$

samt tillslut då även

$$(2\ 3)(3\ 1)(2\ 3) = (1\ 2).$$

Alla transpositioner ligger alltså i delgruppen och eftersom varje permutation kan skrivas som en produkt av transpositioner så måste den minsta delgrupp som innehöll de tre givna permutationerna också innehålla alla permutationer.

8. Bestäm en abelsk grupp med 12 element och som är sådan att inget element har ordning 4.

   Lösning: $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$. Det är lätt att kontrollera de 12 elementen i denna grupp och verifiera att inget element har ordning 4