Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 7, Diskret matematik för D2 och F, vt08.

1. Betrakat gruppen $G = (Z_{19} \setminus \{0\}, \cdot)$.

   (a) Visa att G är en cyklisk grupp.

   Lösning: Vi söker en generator till G, dvs ett element $g \in G$ sådant att varje element $h \in G$ är lika med en potens av g, dvs $h = g^k$ för något icke negativt heltal k. Detta element g måste ha ordning 18 eftersom $|G| = 18$, dvs $g^{18} = 1$ och ingen lägre exponent än 18 till g ger identitetselementet i G.

   Vi vet att om $g^k = 1$ så gäller att k delar antalet element i G. Vi söker gen generator g med hjälp av trial and error.

   Prövar elementet 2. Vi testar om 2 har ordning 2, 3, 6 eller 9, vilka är de icke triviala delarna till talet 18.

   $$2^2 = 4 \neq 1, \quad 2^3 = 8 \neq 1, \quad 2^6 = 7 \neq 1, \qquad 2^9 = 2^3 \cdot 2^6 = 8 \cdot 7 = -1 \neq 1.$$

   Enda kvarvarande möjlighet för ordningen av elementet 2 är 18 och således är 2 en generator till gruppen G.

   Vår slutsats är alltså att eftersom G har ett element av ordning 18 och G består av 18 element så måste G vara cyklisk.

   (b) Bestäm antalet generatorer till G.

   Lösning: Det finns en sats i läroboken som säger att om G är en cyklisk grupp med n element så är antalet element av ordning d, där d delar n, lika med $\varphi(d)$, Eulers φ-funktion. Vi har alltså

   SVAR:
   $$\varphi(18) = 18(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 6.$$

   (c) Bestäm delgrupper med 2, 3, 6 och 9 element till G.

   Lösning: Enligt samma sats i läroboken finns för varje delare d till 18 precis en delgrupp med d element, och som erhålles enligt nedan:

   $$H_2 = \{1, 2^9 = -1\}, \quad H_3 = \{1, 2^6 = 7, 2^{12} = 11\},$$
   $$H_6 = \{1, 2^3 = 8, 2^6 = 7, 2^9 = -1, 2^{12} = 11, 2^{15} = 12\},$$
   $$H_9 = \{1, 2^2 = 4, 2^4 = 16, 2^6 = 7, 2^8 = 9, 2^{10} = 17, 2^{12} = 11, 2^{14} = 6, 2^{16} = 5\}.$$

2. Bestäm antalet delgrupper till en cyklisk grupp med 63 element.

   Lösning: En cyklisk grupp G med n element har precis en delgrupp för varje delare d till n. För den givna gruppen G gäller att

   $$n = 63 = 7 \cdot 3^2,$$

   antalet delare blir då antalet möjliga sätt att kombinera potenser 7^e och 3^f, av talen 7 och 3, med $0 \leq e \leq 1$ och $0 \leq f \leq 2$. Vi får

   SVAR: $2 \cdot 3 = 6$.

3. Vilka av följande grupper är cykliska?

   (a) $(Z_2, +) \times (Z_3, +)$.

   Lösning: Elementet $(1, 1)$ genererar den direkta produkten ovan eftersom givna gruppen har sex element och elementet $(1, 1)$ varken har ordning 2 eller 3 eftersom

   $$2(1, 1) = (0, 1) =\neq (0, 0), \qquad \text{och} \quad 3(1, 1) = (1, 0) \neq (0, 0),$$

   och då ordningen av elementet $(1, 1)$ delar talet 6 så måste detta element ha ordning sex och alltså är givna gruppen cyklisk.

   (b) $(Z_8, +) \times (Z_9, +)$.

   Lösning: Elementet $(1, 1)$ genererar den direkta produkten ovan eftersom givna gruppen har 72 element och om elementet $(1, 1)$ har ordning k så måste

   $$k(1, 1) = (k, k) = (0, 0),$$

   vilket ger att 8 delar k och 9 delar k och alltså 72 delar k. Alltså har elementet $(1, 1)$ ordning 72 och den givna gruppen är cyklisk.

   (c) $(Z_8, +) \times (Z_3, +) \times (Z_3, +)$.

   Lösning: Låt (a, b, c) vara ett godtyckligt element i den givna gruppen. Då gäller, eftersom $a \in Z_8$, $b \in Z_3$ och $c \in Z_3$ att

   $$24(a, b, c) = (0, 0, 0),$$

   och alltså finns inget element som kan ha ordning 72, vilket var antalet element i gruppen.

4. Hörnen i en kvadrat färgas svarta eller vita. Kvadraten kan sedan speglas, vridas och vändas.

   (a) Bestäm en bana med precis två element, och en bana med precis fyra element.

   Lösning: Vi numrerar hörnen 1, 2, 3 och 4 så att hörn 1 har kant till hörn 4 och 2. Och kodar färgläggningarna så att 0 betyder vit färg och 1 svart färg, så tex $(0, 1, 1, 1)$ betecknar den färgläggning där hörn 1 är vitt och de övriga svarta.
   En bana med två element är då

   $$\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\},$$

   och en bana med fyra element är då t ex

   $$\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}.$$

   (b) Bestäm satibilisatorn till en färgläggning där två närliggande hörn är vita och de övriga två svarta.

   Lösning: Vi betraktar färgläggningen $(0, 0, 1, 1)$. Stabilisatorn består av de vridningar, vändningar och speglingar som avbildar kvadraten på sig själv och så att färgläggningen bevaras. Identiteten, dvs ingen vridning etc alls är en sådan. Den enda andra möjligheten ges av att $1 \to 2$ och $2 \to 1$ och då måste även $3 \to 4$ och $4 \to 3$. Så
   SVAR Med vår färgläggning blev stabilisatorn $\{id, (1\ 2)(3\ 4)\}$.

(c) Använd den sk Burnsides lemma för att beräkna antalet banor.

Lösning: Vi listar upp gruppen G av alla vridningar som avbildar kvadraten på sig själv och antalet färläggningar $|F(g)|$ som fixeras av respektive element $g \in G$:

$$\begin{array}{c|c} G & |F(g)| \\ \hline id = (1)(2)(3)(4) & 2^4 = 16 \\ (1\ 2\ 3\ 4) & 2 \\ (1\ 3)(2\ 4) & 2^2 = 4 \\ (1\ 4\ 3\ 2) & 2 \\ (1)(3)(2\ 4) & 2^3 = 8 \\ (2)(4)(1\ 3) & 2^3 = 8 \\ (1\ 4)(2\ 3) & 2^2 = 4 \\ (1\ 2)(4\ 3) & 2^2 = 4 \end{array},$$

och alltså med Burnsides lemma

SVAR:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{8}(16 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = \frac{48}{8} = 6.$$

Anmärkning: Motivering för att tabellen får de angivna värdena, se lösningen av nästa uppgift.

5. Ett rätblock har längden 3 cm, höjden 2 cm och djupet 2 cm. Bestäm antalet sätt att färga rätblockets sidor i 5 olika färger.

Lösning: Kalla vänster kortsida för v, höger kortsida för h, ovansidan för o, undersidan för u, framsidan för f, och baksidan för b. Vi gör en tabell med alla vridningar som vrider rätblocket till sig själv och antalet färgläggningar som fixeras av respektive permutation

$$\begin{array}{c|c} G & |F(g)| \\ \hline id = (v)(h)(f)(o)(b)(u) & 5^6 \\ (v)(h)(f\ o\ b\ u) & 5^3 \\ (v)(h)(f\ b)(o\ u) & 5^4 \\ (v)(h)(f\ u\ b\ o) & 5^3 \\ (v\ h)(f)(b)(o\ u) & 5^4 \\ (v\ h)(f\ o)(b\ u) & 5^3 \\ (v\ h)(f\ b)(o)(u) & 5^4 \\ (v\ h)(f\ u)(b\ o) & 5^3 \end{array},$$

ty sidor som vrids av ev elementet $g \in G$ in i varandra måste ges samma färg om färgläggningen skall fixeras av g. Detta medför att sidor i samma cykel skall ha samma färg, så antalet färgläggningar som fixeras av en permutation är lika med antalet antalet möjliga färger upphöjt till antalet cykler i permutationen g.

Med hjälp av Burnsides lemma får vi nu

SVAR:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{8}(5^6 + 3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3) = 2250.$$

6. Betrakta en grupp G som verkar på en mängd S. Banan $\mathcal{O}$ innehåller 7 element ur S och stabilisatorn till elementet $s \in \mathcal{O}$ består av 4 element. Bestäm antalet element i G.

Lösning: Från den bakomliggande teorin för banor och sabilisatorer vet vi att, med bokens beteckningar, om H är stabilisatorn till s,

$$H = G(s \to s),$$

och s' ett annat element i samma bana, och g ett element i G sådant att $g(s) = s'$ så gäller att

$$G(s \to s') = gH.$$

Varje element i banan $\mathcal{O}$ motsvarar alltså en unik sidoklass till satbilisatorn H till $s \in \mathcal{O}$ (och H är ju en delgrupp till G).

Då H har fyra element och antalet sidoklasser är 7 så måste G innehålla precis 28 element.

SVAR: 28.

---

7. Bestäm samtliga grupper med 149 element.

Lösning: Inget av primtalen 2, 3, 5, 7 eller 11 är delare till talet 149 och $13^2 > 149$. Detta medför att talet 149 är ett primtal. Varje element i en grupp med 149 element har en ordning som delar 149. Så om ordningen hos ett element inte är ett så måste elementets ordning vara 149. Då är gruppen cyklisk, eftersom den har element av ordning 149.

SVAR: Varje grupp med 149 element är cyklisk

8. Bestäm en grupp G som innehåller precis en delgrupp med 3 element, precis en delgrupp med 5 element, ingen delgrupp med 4 element men precis tre olika delgrupper med 2 element. (Det får finnas delgrupper med andra antal element än 4.)

Lösning: Vi försöker med en produkt av grupper, t ex

$$G = (Z_5, +) \times S_3,$$

där S_3 betecknar mängden av permutationer på mängden $\{1, 2, 3\}$. Den har delgrupper med 3 resp 5 element nämligen

$$H_5 = \{(a, id) \in G \mid a \in Z_5\},$$

och

$$H_3 = \{(0, (1\ 2\ 3)), (0, (1\ 3\ 2)), (0, id)\},$$

samt tre med två element, nämligen

$$K_1 = \{(0, id), (0, (1\ 2))\}, \quad K_2 = \{(0, id), (0, (1\ 3))\}, \quad K_3 = \{(0, id), (0, (2\ 3))\}.$$

Undersöker nu om det finns fler delgrupper med tre, fem respektive två element Elementen i en delgrupp med tre element har samtliga förutom identiteten ordning tre eftersom tre är ett primtal, och motsvarande för delgrupper med fem respektive två element.

Låt nu $g = (a, \varphi)$ vara ett element i G. Under vilka förutsättningar har detta element ordning tre? Vi testar:

$$(0, id) = g \circ g \circ g = (3a, \varphi^3) \quad \Rightarrow \quad 3a \equiv_5 0, \text{ och } \varphi^3 = id.$$

Detta ger att elementet a måste vara nollelemntet och φ måste vara ett element av ordning 3 i S_3. Slutsatsen är att g för att ha ordning tre måste g vara lika med element av typen $(0, (1\ 2\ 3))$ eller $(0, (1\ 3\ 2))$ och alltså tillhöra H_3. På samma sätt visas att H_5 är den enda delgruppen med fem element och att det inte finns fler delgrupper med två element än de ovan tre beskrivna. Med samma motivering skulle en grupp med fyra element bestå av element av typ $(0, \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, där dessa fyra element γ_1, γ_2, γ_3 och γ_4 skulle utgöra en delgrupp till S_3 med fyra element. Eftersom S_3 innehåller sex element och därmed, enligt Lagranges sats, saknar delgrupper med fyra element, finns ingen delgrupp med fyra element.

9. Uppgiften utgår emedan den var felformulerad.

   Lösning: Vi observerar att id alltid är konjugerad med sig själv, ty t ex $id \cdot id \cdot id^{-1} = id$. Men identiteten tillhör satbilisatorn till varje element i S.

10. Gruppen G är cyklisk och har en cyklisk delgrupp H med 105 element och en cyklisk delgrupp K med 63 element. Bestäm $H \cap K$.

    Lösning: Vi observerar först att $sgd(105, 63) = 21$.

    Eftersom H är cyklisk och talet 21 delar antalet element i H så finns precis en delgrupp L_H till H med 21 element. Motsvarande gäller för delgruppen K.

    Nu använder vi Lagranges sats. Vi finner att antalet element i G delas av både 105 och 63 och alltså att talet 21 delar $|G|$. Eftersom G är cyklisk så har G precis en delgrupp L_G med 21 element. Men både L_H och L_K är också delgrupper till G, eftersom H och K är delgrupper till G, båda med 21 element. Enda möjligheten är att dessa grupper är lika, dvs

    $$L_G = L_H = L_K.$$

    Vi kan då sluta oss till att $L_G = L_H = L_K \subseteq K$ och $L_G = L_K = L_H \subseteq H$ och alltså

    $$L_G \subseteq H \cap K.$$

    Men $H \cap K$ delgrupp till både H och K ger att antalet element i $H \cap K$ delar antalet element i både H och K och alltså

    $$|H \cap K| \mid sgd(105, 63) = 21.$$

    Vi får alltså att $|H \cap K| \leq 21$. Men då $H \cap K$ innehåller en delgrupp L_G med 21 element så måste $|H \cap K| \geq 21$. Vi har nu kommit fram till att

    $$21 \leq |H \cap K| \leq 21,$$

    och alltså att

    $$|H \cap K| = 21.$$

    Men då $|L_G| = 21$ och $L_G \subseteq H \cap K$ så måste gälla att

    $$H \cap K = L_G,$$

    där L_G var den unika delgruppen till G med 21 element.

    SVAR: $H \cap K$ är den unika delgruppen till G som har 21 element.

11. Bestäm antalet sätt att färga sidorna i en kub med 7 olika färger.

    Lösning: Vi bestämmer först antalet vridningar av kuben som vrider kuben på sig själv, dvs kubens automorfigrupp.

    Någon sida x skall vridas till kubens ovansida och någon av sidan x:s grannsidor y skall bli framsida. Antalet sätt att välja x är sex och då x har fyra angränsande sidor, finns det totalt $6 \cdot 4 = 24$ olika sätt att kombinera ihop x och y på så totalt finns det 24 automorfier av gruppen.

Vi skriver nu upp vår tabell, med beteckinigar som i uppgift nummer 5:

G	$\|F(g)\|$
$id = (v)(h)(f)(o)(b)(u)$	7^6
$(o)(u)(f\ v\ b\ h)$	7^3
$(o)(u)(f\ b)(v\ h)$	7^4
$(o)(u)(f\ h\ b\ v)$	7^3
nedan vrids f till o först	och sedan vrids kuben runt en tänkt z-axel
$(f\ o\ b\ u)(v)(h)$	7^3
$(f\ o\ h)(v\ b\ u)$	7^2
$(f\ o)(v\ h)(b\ u)$	7^3
$(f\ o; v)(b\ u\ h)$	7^2
nedan vrids v till o först	och sedan vrids kuben runt en tänkt z-axel ’
$(v\ o\ h\ u)(f)(b)$	7^3
$(v\ o\ f)(h\ u\ b)$	7^2
$(v\ o)(h\ u)(f\ b)$	7^3
$(v\ o\ b)(h\ u\ f)$	7^2
pss när b och h vrids till o först	och sedan vrids kuben runt en tänkt z-axel
$(o\ u)(f)(v)(b)(h)$	7^5
$(o\ u)(f\ v\ b\ h)$	7^2
$(o\ u)(f\ b)(v\ h)$	7^3
$(o\ u)(f\ h\ b\ v)$	7^2

och Burnsides lemma ger nu antalet banor

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)| = \frac{1}{24}(7^6 + 7^5 + 7^4 + 11\cdot 7^3 + 10\cdot 7^2) = 5880.$$

12. Låt H vara en delgrupp till gruppen G. Elementen i H beskriver funktioner på elementen i G enligt

$$h(g) = h \cdot g.$$

(a) Bestäm antalet banor i G.

Lösning: Vi använder Burnsides lemma och skall för den skull beräkna $|F(h)|$ för varje $h \in H$. Men i detta fall så är

$$F(h) = \{g \in G \mid hg = g\},$$

och alltså är $F(id) = G$ och om $h \neq id$ så gäller att $hg \neq g$ för varje $g \in G$ och således $F(h) = \emptyset$ om $h \neq id$. Enligt Burnsides lemma blir nu antal banor lika med

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|F(h)| = \frac{1}{|H|}|F(id)| = \frac{1}{|H|}|G| = \frac{|G|}{|H|}.$$

SVAR: Antalet banor är

$$\frac{|G|}{|H|}.$$

(b) Beskriv banorna.

Lösning: Låt Hg vara en sidoklass till H i G, dvs

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Då gäller för varje par av element hg resp $h'g$ i denna sidoklass att med $h'' = h'h^{-1} \in H$ så är

$$h''(hg) = h''hg = h'h^{-1}hg = h'g,$$

och därmed, enligt definitionen av bana, att hg och $h'g$ tillhör samma bana.

Nu räknar vi på antalet banor och antalet sidoklasser. Enligt uppgift (a) är antalet banor lika med $|G|/|H|$ vilket också är antalet sidoklasser. Eftersom elementen i en sidoklass tillhör samma bana, som vi visade ovan, så måste banorna bestå av sidoklasserna till H i G.