MODELLTENTA DISKRET MATEMATIK moment A FÖR D2 och F, SF1631 resp SF1630.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Hjälpmedel Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt08 adderas till skrivningspoängen.

DEL I

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{23} till ekvationen
$$19x + 2 = 17.$$

2. (3p) Lös rekursionsekvationen
$$a_n = a_{n-1} + 30a_{n-2}$$
med startvärden $a_0 = 1, a_1 = -27$.

3. (3p) Den bipartita grafen med nodmängderna $X = \{a, b, c, d\}$ och $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ har kanterna $\{a1, a3, b3, c2, d2, d4, d5\}$. Bestäm en alternerande stig till matchningen $M = \{a3, d2\}$.

4. (3p) I en skolklass med 13 flickor och 12 pojkar skall man utse en grupp bestående av tre flickor och fyra pojkar. På hur många sätt kan en sådan grupp utses om precis en av pojkarna P_1 och P_2 i klassen, skall vara med i gruppen. (Svaret får innehålla de fyra räknesätten.)

5. Vi betraktar en graf G med 41 noder. Valensen hos 18 av noderna är 1, 18 noder har valensen 2, och resterande fem noder har valensen 4.
   (a) (1p) Bestäm antalet kanter i G.
   (b) (1p) Kan G ha ett spännande delträd? Motivera ditt svar.
   (c) (1p) Förklara varför G inte kan vara sammanhängande.

DEL II

6. (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till de tre talen 1980, 1680 och 1188.

7. (4p) Betrakta den kompletta (fullständiga) grafen K_{16}. Den grafen har ingen Eulerkrets. Hur många kanter måste man minst ta bort för att få en graf som har en Eulerkrets?

   (Antalet poäng på denna uppgift, beräknas utifrån hur pass nära du kommer det minsta antalet kanter som måste tas bort och hur pass väl du motiverat din lösning. Enbart ett korrekt svar ger inte full poäng på denna uppgift.)

8. (4p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Undersök om det finns någon permutation x sådan att $x\varphi x^3 = \psi$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i beviset.

9. (5p) Det flyger k duvor mot n reden. Duvorna väljer reden slumpvis och helt oberoende av hur de andra duvorna väljer sina reden. Om k är mindre än eller lika med n, $k \leq n$, hur stor är då sannolikheten att minst ett rede innehåller minst två duvor.

10. Ett element y är en jämn kvadrat i en ring Z_n om det finns ett element x i Z_n sådant att $y = x^2$.

    (a) (2p) Låt p vara ett primtal. Bestäm antalet olika jämna kvadrater i ringen Z_p.

    (b) (3p) Antag $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ där talen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är olika primtal. Bestäm antalet jämna kvadrater i ringen Z_n.