Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar inför lappskrivning nummer 8, Diskret matematik för D2 och F, vt08.

1. Undersök om polynomet $x^3 + x + 1$ är irreducibelt i polynomringen $Z_5[x]$.
2. Undersök om polynomet $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ är irreducibelt i polynomringen $Z_5[x]$.
3. Betrakta polynomringen $Z_2[x]$ och bestäm den största gemensamma delaren $D(x)$ till de bägge polynomen $p(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ och $q(x) = x^2 + 1$ samt bestäm polynom $n(x)$ och $m(x)$ sådana att
$$D(x) = n(x)p(x) + m(x)q(x).$$
4. Faktorisera polynomet $x^6 - 1$ i irreducibla faktorer i polynomringen
   (a) $Z_7[x]$.
   (b) $Z_5[x]$.
   (c) $Z_3[x]$.
   (d) $Q[x]$.
   (e) $R[x]$.
   (f) $C[x]$,

   där Q betecknar kroppen av rationella tal, R kroppen av reellla tal och C de komplexa talen.
5. Bestäm samtliga enheter i ringen $R = M_{2\times2}(Z_2)$ av 2×2-matriser med element från kroppen Z_2.
6. Visa att mängden
$$Z[\sqrt{2}] = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in Z\},$$
där Z betecknar mängden av hela tal, bildar en ring.

---

7. Undersök om mängden av 3×3 matriser
$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
där $a, b, c \in Z_5$, bildar en ring utan etta.
8. Betrakta ringen $R = M_{3\times3}(Z_3)$ av 3×3-matriser med element från kroppen Z_3. Visa att om $A \in R$ och $\det(A) = 0$ så finns alltid en matris B sådan att $AB = 0$. Kommer det då också att finnas en matris C så att $CA = 0$?
9. Polynomet $p(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$ har nollställena 1, -1, 2, -2 och 3 i ringen Z. Faktorisera $p(x)$ i irreducibla faktorer i ringen $Z_{17}[x]$.
10. Konstruera ett irreducibelt fjärdegradspolynom i polynomringen $Z_3[x]$.
11. Bestäm antalet enheter i ringen $R = M_{2\times2}(Z_p)$ av 2×2-matriser med element från kroppen Z_p, där p är ett primtal.
12. Undersök om mängden
$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\},$$
där Q betecknar mängden av rationella tal, bildar en kropp.