Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 3 juni 2008 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 37p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt08 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 6 \qquad \text{och} \quad a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \quad .$$

2. Bestäm

   (a) (1p) Stirlingtalet $S(5, 2)$.

   (b) (1p) Binomialkoefficienten $\binom{5}{2}$

   (c) (1p) $5!$

3. (3p) Bestäm minst en lösning till den diofantiska ekvationen

$$738x + 541y = 1,$$

   eller visa att lösning saknas.

4. (3p) Man har sju papperslappar markerade med siffrorna 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Hur många olika sjusiffriga tal kan man bilda genom att lägga ut dem i en följd? Svaret skall ges i formen av ett naturligt tal.

5. (3p) Den planära sammanhängande grafen G har nio noder varav en har valensen (degree) två, en har valensen tre, en har valensen fem och resterande sex noder har valensen fyra. Bestäm antalet områden som uppstår när grafen ritas plant.

DEL II

6. (3p) Rita, eller visa att det inte existerar, sammanhängande grafer G_1, G_2 och G_3 samtliga vardera med åtta noder och 16 kanter och sådana att

   (a) (1p) G_1 har en Eulerkrets men saknar Hamiltoncykel.

   (b) (1p) G_2 har Hamiltoncykel men saknar Eulerkrets.

   (c) (1p) G_3 har varken Eulerkrets eller Hamiltoncykel.

7. Man skall utse precis nio personer ur de tre mängderna $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}, \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ och $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$. (Mängderna är disjunkta så ingen person finns med i fler än i en av mängderna $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.) På hur många sätt kan detta ske om

   (a) (1p) Inga restriktioner finns.

   (b) (2p) Minst en person från varje mängd skall finnas med i urvalet.

   (c) (2p) Precis tre personer från varje mängd skall ingå och högst en person från mängden $\{A_1, B_1, C_1\}$ får finnas med bland de nio utvalda personerna.

8. (4p) Låt φ beteckna permutationen $\varphi = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$. Undersök om det finns permutationer $\gamma \neq id$ med $\gamma^2 = id$ och ψ sådana att
$$\varphi = \gamma\psi^k\gamma,$$
för något heltal $k \geq 3$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (2p) Visa att om 12 delar det positiva heltalet $n - 1$ så kommer både 7 och 13 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.

   (b) (1p) Bestäm ett positivet heltal $d > 12$ med egenskapen att om d delar det positiva heltalet $n - 1$ så kommer talet 91 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.

   (c) (2p) Beskriv på lämpligt sätt samtliga heltal d som har egenskapen att om d delar det positiva heltalet $n - 1$ så kommer 91 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.

   Anm. Givetvis krävs också ett bevis för att samtliga de heltal d, och inga andra, som du beskriver har denna egenskap.

10. (5p) Man kan räkna med matriser som vanligt även om dess element tillhör Z_n och alla räkningar sker modulo n. Speciellt är många av satserna om matriser och determinater från vanliga linjära algebran giltiga när n är ett primtal $n = p$.

    (a) (2p) Om $n = 3$ hur stor del av samtliga 2×2-matriser med element i Z_3 blir då inverterbara.

    (b) (3p) Bestäm en generell formel för antalet inverterbara 2×2-matriser när n är lika med primtalet p.

    Anm. Kurs i linjär algebra är ju ett förkunskapskrav till kursen i Diskret matematik och du får använda satser och samband från denna kurs efter fritt val och utan att dessa behöver citeras eller bevisas, jfr ingressen till denna del av skrivningen.