Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 3 juni 2008 kl 08.00-13.00.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 6 \qquad \text{och} \quad a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \quad .$$

Lösning: Rekursionsekvationens karakteristiska ekvation $r^2 = 6r - 8$ har rötterna $r = 2$ och $r = 4$, och därmed blir den allmänna lösningen

$$a_n = A2^n + B4^n.$$

Anpassning till begynnelsevärdena ger systemet

$$\begin{cases} 2 &= A + B \\ 6 &= 2A + 4B, \end{cases}$$

som ju har lösningen $A = 1$ och $B = 1$.

SVAR: $a_n = 2^n + 4^n$.

2. Bestäm

(a) (1p) Stirlingtalet $S(5, 2)$.

Lösning: Använder att $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ samt att $S(n, 1) = 1$ nedan

$$S(5, 2) = S(4, 1) + 2S(4, 2) = 1 + 2(S(3, 1) + 2S(3, 2)) =$$

$$3 + 4(S(2, 1) + 2S(2, 2)) = 7 + 8 = 15.$$

(b) (1p) Binomialkoefficienten $\binom{5}{2}$

Lösning:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

(c) (1p) $5!$

Lösning: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

3. (3p) Bestäm minst en lösning till den diofantiska ekvationen

$$738x + 541y = 1,$$

eller visa att lösning saknas.

Lösning: Söker först de gemnesamma delarna till de bägge talen 738 och 541 med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{array}{rcrcr} 738 & = & 541 & + & 197 \\ 541 & = & 3 \cdot 197 & - & 50 \\ 197 & = & 4 \cdot 50 & - & 3 \\ 50 & = & 17 \cdot 3 & - & 1 \end{array}$$

Det finns inga andra gemensamma delare än talen 1 och -1. Vi använder nu våra räkningar ovan för att lösa den givna diofantiska ekvationen:

$$1 = 17 \cdot 3 - 50 = 17(4 \cdot 50 - 197) - 50 = 67 \cdot 50 - 17 \cdot 197 = 7(3 \cdot 197 - 541) - 17 \cdot 197 =$$

$$184 \cdot 197 - 67 \cdot 541 = 184(738 - 541) - 67 \cdot 541 = 184 \cdot 738 - 251 \cdot 541.$$

SVAR: T ex $x = 184$ och $y = -251$.

4. (3p) Man har sju papperslappar markerade med siffrorna 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Hur många olika sjusiffriga tal kan man bilda genom att lägga ut dem i en följd? Svaret skall ges i formen av ett naturligt tal.

Lösning: Av de sju olika positionerna i talet skall två väljas till siffrorna 1, tre till siffrorna 3 och två till siffrorna 3. Antalet möjligheter ges av multinomialkoefficienten:

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

5. (3p) Den planära sammanhängande grafen G har nio noder varav en har valensen (degree) två, en har valensen tre, en har valensen fem och resterande sex noder har valensen fyra. Bestäm antalet områden som uppstår när grafen ritas plant.

Lösning: Vi bestämmer först antalet kanter med hjälp av sambandet $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$, där V och E betecknar mängden av noder respektive kanter och $\delta(v)$ betecknar valensen hos noden v. Vi får alltså att

$$2|E| = 2 + 3 + 5 + 6 \cdot 4 = 34,$$

så antalet kanter är 17. Nu använder vi Eulers formel $v + r = e + 2$ för planära grafer där v, r och e betecknar antalet noder, områden resp kanter som uppstår vid en plan ritning av en planär graf:

$$r = e + 2 - v = 17 + 2 - 9 = 10.$$

SVAR: Antalet områden är 10.

DEL II

6. (3p) Rita, eller visa att det inte existerar, sammanhängande grafer G_1, G_2 och G_3 samtliga vardera med åtta noder och 16 kanter och sådana att

   (a) (1p) G_1 har en Eulerkrets men saknar Hamiltoncykel.

   Lösning:

   (b) (1p) G_2 har Hamiltoncykel men saknar Eulerkrets.

   Lösning:

   (c) (1p) G_3 har varken Eulerkrets eller Hamiltoncykel.

   Lösning:

7. Man skall utse precis nio personer ur de tre mängderna $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}, \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ och $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$. (Mängderna är disjunkta så ingen person finns med i fler än i en av mängderna $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.) På hur många sätt kan detta ske om

   (a) (1p) Inga restriktioner finns.

   Lösning: Av totalt 18 personer skall nio väljas Antalet sätt detta kan ske på är vårt
   SVAR:
$$\binom{18}{9}.$$

   (b) (2p) Minst en person från varje mängd skall finnas med i urvalet.

   Lösning: Vi använder oss av inklusion exklusion och låter A beteckna de urval där ingen från $\mathcal{A}$ kommer med, B beteckna de urval där ingen från $\mathcal{B}$ kommer med och C beteckna de urval där ingen från $\mathcal{C}$ kommer med. Svaret ges då av
$$\binom{18}{9} - |A \cup B \cup C|,$$
   där formeln för inklusion exklusion ger att
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$
   Man ser omdelbart att $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \emptyset$ och att
$$|A| = |B| = |C| = \binom{12}{9}.$$
   Således får vi
   SVAR
$$\binom{18}{9} - 3\binom{12}{9}.$$

   (c) (2p) Precis tre personer från varje mängd skall ingå och högst en person från mängden $\{A_1, B_1, C_1\}$ får finnas med bland de nio utvalda personerna.

   Lösning: Vi gör en indelning i fall:
   Fall 1: Ingen av A_1, B_1, C_1 ingår och vi väljer tre av de övriga fem i varje grupp vilket går på
$$\binom{5}{3}^3,$$

olika sätt.

Fall 2: Precis en av A_1, B_1, C_1 ingår. Först väljer vi vilken sen utser vi de övriga vilket enligt multiplikationsprincipen går på

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}$$

olika sätt. Summerar vi antalet möjligheter får vi

SVAR:

$$\binom{5}{3}^3 + \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}.$$

8. (4p) Låt φ beteckna permutationen $\varphi = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$. Undersök om det finns permutationer $\gamma \neq id$ med $\gamma^2 = id$ och ψ sådana att
$$\varphi = \gamma\psi^k\gamma,$$
för något heltal $k \geq 3$.

Lösning: Vi ser att $\gamma = \gamma^{-1}$, eftersom $\gamma\gamma = id$. Alltså är φ och ψ^k konjugerade permutationer och därmed av samma typ, dvs
$$\psi^k = (a\ b\ c)(d\ e\ f)(g\ h\ i),$$
vilket ger oss iden att $k = 3$ och $\psi = (a\ d\ g\ b\ e\ h\ c\ f\ i)$. Låter vi nu $\gamma = (a\ b)$ så har vi att
$$\gamma\psi^3\gamma = (a\ b)(a\ b\ c)(d\ e\ f)(g\ h\ i)(a\ b) = (a\ c\ b)(d\ e\ f)(g\ h\ i).$$
Vi identiferar nu bokstäverna $a, b, \ldots, i$ med respektive av siffrorna $1, 2, 3, \ldots, 9$ och får

SVAR: Ja (med $k = 3$, $\gamma = (1\ 3)$ och $\psi = (1\ 4\ 7\ 3\ 5\ 8\ 2\ 6\ 9)$).

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (2p) Visa att om 12 delar det positiva heltalet $n - 1$ så kommer både 7 och 13 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.

Lösning: Vi visar först att talet 7 delar det givna uttrycket. Vi ser att
$$a^n - a = a(a^{n-1} - 1),$$
och vi söker tillämpa Fermats lilla sats. Om talet sju delar a är vi klara, ty då kommer 7 att delat $a^n - a$ enligt ovan. Antag att 7 inte delar a och låt $n - 1 = 12k$. Då gäller enligt Fermats lilla sats att $a^6 \equiv_7 1$, och enligt kongruenskalkylens räknelagar att
$$a^6 \equiv_7 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a^{n-1} \equiv_7 a^{12k} \equiv_7 (a^6)^{2k} \equiv_7 1^{2k} \equiv_7 1.$$
Fallet 13 behandlas helt analogt.

(b) (1p) Bestäm ett positivet heltal $d > 12$ med egenskapen att om d delar det positiva heltalet $n - 1$ så kommer talet 91 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.

Lösning: Från uppgiften a) finner vi att både 7 och 13 delar $a^n - a$ och därmed att också talet 91 delar $a^n - a$ under förutsättning att 12 delar $n - 1$. Med om t ex 24 delar $n - 1$ så kommer också 12 att dela $n - 1$ och därmed talet 91 att dela $a^n - a$ för alla hela tal a så lå t ex $d = 12$.

(c) (2p) Beskriv på lämpligt sätt samtliga heltal d som har egenskapen att om d delar det positiva heltalet $n-1$ så kommer 91 att dela talet $a^n - a$ för alla hela tal a.
Anm. Givetvis krävs också ett bevis för att samtliga de heltal d, och inga andra, som du beskriver har denna egenskap.

Lösning: Vi använder oss av kinesiska restsatsen och observerar först att

$$Z_{91} \approx Z_7 \times Z_{13}.$$

Så vi frågar oss först för vilka positiva heltal n det är sant att $a^n \equiv_7 a$ och $a^n \equiv_{13} a$ för alla heltal a. Vi testar oss fram

$$\begin{array}{ll} 1^n \equiv_7 1 & \text{för alla } n \\ 2^n \equiv_7 2 & \text{för} \quad n = 4, 7, 10, \ldots \\ 3^n \equiv_7 3 & \text{för} \quad n = 7, 13, 19, \ldots \\ 4^n \equiv_7 4 & \text{för} \quad n = 7, 13, 19, \ldots \\ 5^n \equiv_7 5 & \text{för} \quad n = 4, 7, 10, \ldots \\ 6^n \equiv_7 6 & \text{för} \quad n = 3, 10, 17, \ldots \end{array}$$

Vi ser att om och endast om talen 2, 3 och 6 delar talet $n-1$ så kommer talet 7 att delat $a^n - a$ för alla heltal a.
En liknande undersökning i fallet 13 ger att om och endast om talen 2, 3, 4, 6 och 12 delar talet $n-1$ så kommer 13 att dela $a^n - a$ för alla hela tal a.
Nu tillbaka till kinesiska restsatsen. Låt φ vara isomorphin från Z_{91} till $Z_7 \times Z_{13}$ och

$$\varphi(a) = (a_1, a_2).$$

Då

$$a^n \equiv_{91} a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1^n \equiv_7 a_1 \quad \text{och} \quad a_2^n \equiv_{13} a_2,$$

så får vi att $a^n \equiv_{91} a$ om och endast om samtliga av talen 2, 3, 4, 6 och 12 delar talet $n-1$. Så om 12 delar talet d så gäller att om d delar $n-1$ så kommer 12 att dela $n-1$ och därmed $a^n - a$ att delas av talet 91. Om 12 inte delar d kan vi välja $n = d + 1$ och hittar då ett n sådant att 91 inte delar $a^n - a$ för alla heltal a.
SVAR: Påståendet är sant för talen $d = 12 \cdot k$, där $k = 1, 2, 3, \ldots$.

10. (5p) Man kan räkna med matriser som vanligt även om dess element tillhör Z_n och alla räkningar sker modulo n. Speciellt är många av satserna om matriser och determinater från vanliga linjära algebran giltiga när n är ett primtal $n = p$.

(a) (2p) Om $n = 3$ hur stor del av samtliga 2×2-matriser med element i Z_3 blir då inverterbara.

Lösning: Se nedan ocfh låt $p = 3$.

(b) (3p) Bestäm en generell formel för antalet inverterbara 2×2-matriser när n är lika med primtalet p.

Lösning: Antalet olika 2×2-matriser är p^4 och en 2×2-matris är inverterbar precis då dess kolonner inte är multiplar av varandra. Antag kolonn ett är skild från nollkolonnen. Det finns $p^2 - 1$ olika sådana kolonner och det finns p olika multiplar av sådana kolonner. Om kolonn nummer ett är nollkolonnen är matrisen inte heller inverterbar och det finns p^2 olika möjligheter för kolonn nummer två. Antalet matriser som ej är inverterbara blir då lika med

$$p(p^2 - 1) + p^2.$$

SVAR: $p^4 - p^3 - p^2 + p$

Anm. Kurs i linjär algebra är ju ett förkunskapskrav till kursen i Diskret matematik och du får använda satser och samband från denna kurs efter fritt val och utan att dessa behöver citeras eller bevisas, jfr ingressen till denna del av skrivningen.