Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 2B till kursen Diskret matematik, moment B, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 15 april 2008, kl 08.15-08.40.

1. Använd t ex någon lämplig sats eller något lämpligt samband för cykliska grupper för att bestämma samtliga delgrupper, med färre än 33 element, till den cykliska gruppen $G = (Z_{33}, +)$.

Samtliga element i repektive delgrupp skall anges för att en bonuspoäng skall erhållas, men det behövs ingen motivering i lösningen av denna uppgift.

Lösning:

$$H_1 = \{0\} \qquad \text{(men inget poängavdrag om man missade denna grupp).}$$

$$H_2 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 0\},$$

$$H_3 = \{11, 22, 0\}.$$

2. Gruppen G med 17 element verkar på mängden S med 19 element, på sedvanligt sätt, dvs varje element $g \in G$ definierar en funktion på S genom

$$g : s \mapsto g(s) \in S.$$

Ange, med en kortfattad motivering, vilka möjligheter det finns för antalet banor (eng. orbits) som då uppstår. Alla resultat och satser som presenterats under kursen får användas.

Lösning: Antalet element i en bana B är lika med antalet sidoklasser till satbilisatorn $G(b \to b)$, som ju är en delgrupp till G, till ett element b i banan B. Eftersom $G(b \to b)$ är en delgrupp till G och G har 17 element så kommer antingen antalet element i stabilisatorn vara 1 eller 17 och antalet sidoklasser att vara antingen 17 eller 1 och därmed gäller att

$$|B| \in \{1, 17\}.$$

Om en bana har 17 element så måste alla andra banor ha högst ett element och i så fall blir antalet banor

$$|\mathcal{O}| = 1 + (19 - 17) = 3.$$

Om ingen bana har 17 element så har alla banor precis ett element och antalet banor blir 19.

SVAR: Antal banor är antingen 3 eller 19.

ANM. Motiveringen behöver inte vara lika omfattande som den ovan givna för att ge poäng.