Lösningar ks1 i SF1633 Differentialekvationer I, 20 sep 2007

1) Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

där $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ antas vara kontinuerliga i hela xy-planet. Enligt den allmänna existens- och entydighetssatsen går det en unik lokal lösningskurva genom varje punkt (x_0, y_0) i xy-planet.
a) (2p) Förklara varför två olika lösningskurvor inte kan skära varandra.
b) (1p) Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (y-1)\cos(xy), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

utan att räkna.

Lösning: a) Om två lösningskurvor skure varandra med skärningspunkt (x_0, y_0) vore de två olika lokala lösningskurvor kring punkten. Det skulle motsäga att den lokala lösningskurvan enligt satsen är unik. **Saken är klar.** (Om man räknar kurvorna som skärande även om de sammanfaller en bit kring punkten, skulle kurvorna sammanfalla för alla x i ett slutet intervall (eftersom de är kontinuerliga), men inget större intervall, och antingen den största eller den minsta punkten i intervallet skulle ge motsägelse som nyss.)
b) Tydligen är den konstanta funktionen $y(x) = 1$ en lösning. Enligt satsen är det den enda lösningen. **Svar: Lösningen är $y(x) = 1$ för alla x.**

---

2) (3p) Ett enkelt exempel på ett problem av samma typ som i uppgift 1) är

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

eftersom $f = y^2$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ är snälla överallt. Bestäm det maximala lösningsintervallet till lösningen genom punkten $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

Lösning: Ekvationen är separabel, den kan skrivas $\frac{y'}{y^2} = 1$. Integration ger $-\frac{1}{y} = x + C$, där C är en konstant som bestäms av villkoret att $y(3) = -1$. Det ger $-\frac{1}{-1} = 3 + C$, så $C = 1 - 3 = -2$. Då $y(x)$ löses ut, fås $y(x) = \frac{1}{2-x}$. Det maximala intervall som innehåller $x = 3$ och där y är snäll är $]2, \infty[$.
Svar: Det maximala intervallet är $]2, \infty[$, dvs $\{x \mid 2 < x\}$.

3) (3p) Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \sin x + 2x\, e^{-\cos x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen.
Vi skriver den på formen $y' - y\, \sin x = 2x\, e^{-\cos x}$ och finner en integrerande faktor $e^{\int -\sin x\, dx} = e^{\cos x}$. Multipliceras ekvationen med denna faktor fås $e^{\cos x} y' - \sin x\, e^{\cos x} y = (e^{\cos x} y)' = 2x$, så $e^{\cos x} y(x) = x^2 + C$, C en godtycklig konstant. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$y(x) = x^2\, e^{-\cos x} + C\, e^{-\cos x}, \quad C \text{ konstant.}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $1 = 0^2\, e^{-\cos 0} + C\, e^{-\cos 0} = Ce^{-1}$, så $C = e$.
Svar: Den sökta lösningen är $\boldsymbol{y(x) = x^2\, e^{-\cos x} + e^{1-\cos x}}$.

Lösningar ks2 i SF1633 Differentialekvationer I, 20 sep 2007

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Differentialekvationen $(\sin x + 2)y'' + \frac{1}{x^2}y' - y = x$ har precis en lösning som uppfyller $y'(1) = 1, y(1) = \frac{1}{2}$ och är definierad för alla $x > 0$. (Ja, se Thm 4.1, s. 127 i ZC.)	X	
b)	Ekvationen i a) är **linjär** och **inhomogen**. (Javisst, enligt definition i boken.)	X	
c)	Ekvationen $x^2y^{(4)} - \frac{\ln x}{2+\sin x}y' - 3xy = g(x)$ har precis en lösning för $x > 0$ om $g(x) \neq 0$ och kontinuerlig. (Nej, se Thm 4.6, s. 135 i ZC.)		X
d)	Om man känner en lösning till en linjär, homogen differentialekvation, kan man använda "reduktion av ordningen" för att finna fler lösningar. (Ja, 4.2 i ZC.)	X	
e)	Om wronskideterminanten $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$, är funktionerna $f_1, \ldots, f_n$ linjärt oberoende i varje intervall som innehåller x_0. (Ja, så är det.)	X	
f)	Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ båda är lösningar till ekvationen $(x^2 + 1)y'' - y\cos x = \sin x$, är $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ också det, för godtyckliga konstanter c_1, c_2. (Nej, inhomogen.)		X

2) (3p) Verifiera att differentialekvationen

$$(2x^3 + x^2)y'' - (6x^2 + 2x)y' + (6x + 2)y = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = x$ och använd den för att finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: Enligt metoden "reduktion av ordningen" skriver vi lösningen $y(x)$ som $u(x)y_1(x) = xu(x)$.
Då fås $y' = xu' + u$ och $y'' = xu'' + 2u'$, så insättning i ekvationen ger $(2x^3 + x^2)(xu'' + 2u') - (6x^2 + 2x)(xu' + u) + (6x + 2)xu = 0$,
dvs $(2x^4 + x^3)u'' - 2x^3u' = 0$, så (då $x > 0$) $u'' - \frac{2}{2x+1}u' = 0$ och (integrerande faktor $e^{-\ln(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$) $\frac{1}{2x+1}u'' - \frac{2}{(2x+1)^2}u' = (\frac{u'}{2x+1})' = 0$.
Således är $\frac{u'}{2x+1} = c_1$, en konstant, och $u' = c_1(2x + 1)$, så $u = c_1(x^2 + x) + c_2$ och $y(x) = xu(x)$ ger svaret.

Svar: $\boldsymbol{y(x) = c_1(x^3 + x^2) + c_2x}$, $\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**

Valet $c_1 = 0, c_2 = 1$ ger att $y_1(x) = x$ verkligen är en lösning till ekvationen, vilket förstås enklare kunde ha verifierats direkt.

3) (3p) Visa att differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

har lösningarna $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = xe^x$.
Använd detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

Lösning: Insättning av y_1 och y_2 i den homogena ekvationen visar att de är lösningar. Eftersom ekvationen har konstanta koefficienter kan man få y_1 och y_2 genom att lösa den karakteristiska ekvationen etc.
För att lösa den inhomogena ekvationen, använder vi variation av parametrar. Lösningen är då $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = e^x u_1(x) + xe^x u_2(x)$, där u_1, u_2 uppfyller

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

(koefficienten för y'' i ODE:n är 1, så dess HL finns i sista ledet.)

$$\begin{cases} e^x u_1' + xe^x u_2' & = 0 \\ e^x u_1' + (x+1)e^x u_2' & = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' & = -1 \\ u_2' & = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 & = -x + c_1 \\ u_2 & = \ln x + c_2 \end{cases},$$

där c_1, c_2 förstås är godtyckliga konstanter. Således $y(x) = (-x + c_1)e^x + (\ln x + c_2)xe^x = xe^x \ln x + c_1 e^x + (c_2 - 1)xe^x$ och

Svar: Den allmänna lösningen är $\boldsymbol{y(x) = xe^x \ln x + c_1 e^x + c_3 xe^x}$, $\boldsymbol{c_1, c_3}$ godtyckliga konstanter.