Lösningar ks4 i SF1633 Differentialekvationer I, 1 nov 2007

1) (3p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

där $x = x(t)$ och $y = y(t)$.

Lösning: $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ger karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \iff \lambda = \pm i.$$

$$\lambda = i \Longrightarrow C - \lambda I = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{med egenvektorn} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right).$$

Vi får alltså den komplexa lösningen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

varur

Svar: Den allmänna lösningen är

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}, \quad \boldsymbol{A, B} \textbf{ godtyckliga konstanter.}$$

ALTERNATIVT:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -x \iff \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \Longrightarrow$$

$$x = A\,\cos t + B\,\sin t \quad \text{och} \quad y = \frac{dx}{dt} = A\,(-\sin t) + B\,\cos t.$$

---

2) (3p) Låt $a \in \mathbb{R}$. Det icke-linjära systemet

$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + ay(x^2+y^2) \end{aligned}\right\}$$

har uppenbarligen origo $(0,0)$ som en kritisk punkt. Linjarisera (*) i origo och bestäm vilken typ av kritisk punkt som det linjariserade systemet har där.

Lösning: Linjariseringen i origo ges av

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Antingen, med bokens $\tau\Delta$-metod:

$$\tau = 0 + 0 = 0, \quad \Delta = 1 \Longrightarrow \text{origo är ett } \textit{centrum},$$

eller, med hjälp av egenvärdena, vilka som i uppgift 1) fås till $\pm i$ (dvs rent imaginära, $\neq 0$), ses detsamma.

Svar: Origo är ett centrum för det linjariserade systemet.

3) (3p) För att förstå hur lösningarna till (*) ovan uppför sig nära origo börjar vi med att införa

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Visa att

$$2r\,\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) \quad \text{är lika med} \quad 2ar^4,$$

och slut härur att

$$\frac{dr}{dt} = ar^3 \quad \text{om} \quad r \neq 0.$$

Använd lösningen av den senare differentialekvationen för att förstå vilken typ av kritisk punkt som origo är då $a > 0$ respektive $a < 0$.

Lösning:

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2a\,(x^2 + y^2)^2 = 2ar^4 \iff \frac{dr}{dt} = ar^3 \text{ om } r \neq 0.$$

Vi får alltså en separabel differentialekvation som löses på vanligt sätt då $r \neq 0$:

$$\frac{dr}{dt} = a\,r^3 \iff \int r^{-3}\,dr = a\int dt \iff -\frac{1}{2}r^{-2} = at - \frac{1}{2}C$$

$$\iff r^{-2} = C - 2at = r^{-2}(0) - 2at \iff r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2(0)} - 2at}}.$$

Så

$\boldsymbol{a > 0}$**:** $r \to \infty$ då $t \nearrow \frac{1}{2ar^2(0)} \Longrightarrow$ *instabilitet,*
$\boldsymbol{a < 0}$**:** $r \to 0$ då $t \to \infty \Longrightarrow$ *asymptotisk stabilitet.*

Lösningar ks5 i SF1633 Differentialekvationer I, 1 nov 2007

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är ortogonala på intervallet $[-\pi, \pi]$, måste $f(x)+g(x)$ och $f(x)-g(x)$ också vara det. [Nej, bara om $\|f\| = \|g\|$.]		×
b) Cosinusserien för funktionen $f(x) = 1 - \sin 2x$, $0 \le x \le \pi$, konvergerar för $x = \frac{5\pi}{4}$ mot 2. [Ja, mot en 2π-periodisk jämn funktion, så för $\frac{5\pi}{4}$ som för $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ som för $-(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$, mot $f(\frac{3\pi}{4}) = 2$]	×	
c) Fourierserien för den periodiska funktionen f kan inte konvergera i en punkt där både f och f' är diskontinuerliga. [Jodå, se Thm 11.1, s.437 i ZC.]		×
d) Produkten av en jämn och en udda funktion är alltid udda. [Javisst, se Thm 11.2, s.441 i ZC.]	×	
e) Värmeledningsekvationen (i en rumsdimension) är $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$, k en konstant. [Ja, så är det.]	×	
f) Funktionen $u(x,t) = x^2 + a^2t^2$ är en lösning till vågekvationen (med våghastighet a). [Ja, båda leden blir 2 (eller $2a^2$).]	×	

2a) (2p) Finn fourierserien för den 2π-periodiska funktion f som uppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \le x \le 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

b) (1p) Vad konvergerar serien mot då $x = 3\pi$?

Lösning: a) Fourierserien för $f(x)$ på $[-\pi, \pi]$ ges av

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

med $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.
I vårt fall:
$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_0^{\pi} 2\,dx\right) = \frac{1}{\pi}(\pi + 2\pi) = 3$
$f(x) - \frac{a_0}{2} = f(x) - \frac{3}{2}$ är en udda funktion, så $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$
$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} 2\cdot\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-2\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right) =$
$\frac{1}{\pi n}(-\cos 0 + \cos(-n\pi) - 2\cos n\pi + 2\cos 0) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämnt} \end{cases}.$

b) Då $x = 3\pi$ blir alla sin-termer 0, så serien konvergerar mot $\frac{3}{2}$.

Svar: a) Fourierserien är $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin nx$.
b) För $x = 3\pi$ konvergerar den mot $\frac{3}{2}$.

3) (3p) En sträng har sina ändar fästa i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$.
Vid $t = 0$ släpps den från läget $u(x, 0) = \sin x + \sin 2x$ med hastigheten 0.
Bestäm strängens läge $u(x, t)$ för $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi$, då läget förutsätts uppfylla vågekvationen (med våghastighet a).

Lösning: (Mer detaljerad än vad som krävs av de skrivande)
Problemet blir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \quad \text{PDE (vågekvationen)} \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \quad \text{RV (ändarna sitter fast)} \\ u(x,0) = \sin\ x + \sin 2x, & 0 < x < \pi \quad \text{BV (läget vid } t = 0) \\ u'_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \quad \text{BV (strängen släpps med hastighet 0)} \end{cases}$$

Variabelseparation, vi söker lösningar av form $u(x,t) = X(x)T(t)$ till PDE+RV:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda, \text{ konstant} \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

ger som vanligt icke-triviala lösningar bara då $\lambda = \lambda_n = n^2$,
$X_n(x) = \text{konst.} \cdot \sin nx, \quad T_n(t) = a_n \cos nat + b_n \sin nat, \quad n = 1, 2, \ldots,$
så $u_n(x,t) = \sin nx(a_n \cos nat + b_n \sin nat)$

Superposition ger lösningen
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx(a_n \cos nat + b_n \sin nat)$,
där a_n, b_n bestäms av BV:
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ och $u'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nab_n \sin nx$.
I vårt fall är $u(x,0) = \sin x + \sin 2x$, så $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = 0,\ n = 3, 4, \ldots$
och $u'_t(x,0) = 0$, så alla $b_n = 0$.
Insättning ger

Svar: Strängens läge för $0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sin x\ \cos at + \sin 2x\ \cos 2at}$$