KTH Matematik

Tentamen måndagen den 12 november 2007 för BD, M, P (m.fl.)
SF1633, Differentialekvationer I (samt 5B1206, 5B1200)

Skrivtid: 13.00–18.00

Examinatorer: Olle Stormark, tel 790 7206 och Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtet hjälpmedel: "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (BETA) av Råde, Westergren.
Uppgifterna 1–5 motsvarar kursens fem moduler. Poängen på dem är den högsta av uppgiftens bedömning och resultatet på eventuell motsvarande kontrollskrivning (eller inlämningsuppgift) som gjorts under kursens gång.

Betygssättning: Tentamen blir godkänd (betyg A-E) om och endast om modulerna givit minst 8p och ingen modul givit 0p.
Godkänd tentamen och 23–30p ger betyg A, 19–22p ger betyg B, 16–18p ger betyg C, 12–15p ger betyg D, 8–11p ger betyg E.
För äldre (kursnummer 5B1206 eller 5B1200) ges betyg 5, 4, 3, K (eller U), med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.
Den som fått totalt 6p eller 7p på moduluppgifterna får Fx (eller K), dvs har rätt att komplettera till betyg E (eller 3).

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. (2p) Finn den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' + (2x+1)\,y = x\,e^{-x}$$

som uppfyller $y(0) = 0$.

2. (2p) $y_1(x) = e^{-x}$ och $y_2(x) = \ln x\, e^{-x}$ är lösningar till differentialekvationen

$$x\,y'' + (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0, \quad x > 0.$$

Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$x\,y'' + (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = x\,e^{-x}, \quad x > 0.$$

3. (2p) Finn lösningen $y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} y'' + y' = f(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}, \qquad \text{där} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{då } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{då } 1 \le t \end{cases}.$$

4. (2p) Finn funktioner $x(t)$ och $y(t)$ så att

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

5. (2p) Finn det minsta $a > 0$, så att funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ är ortogonala på intervallet $[0, a]$.

V.g. vänd!

6. (4p) Tre bassänger innehåller V_1, V_2 respektive V_3 (liter) (salt)vatten. Vid tiden t finns det $x_1(t)$, $x_2(t)$ respektive $x_3(t)$ (kg) salt i dem (resten är vatten). Till bassäng 1 förs sötvatten med flödet r (l/min) och från den förs (fullständigt blandat) vatten till bassäng 2 med flödet $2r$ och till bassäng 3 med flödet r. Från bassäng 2 förs (fullständigt blandat) vatten till bassängerna 1 och 3, vardera med flödet r. Från bassäng 3 förs (fullständigt blandat) vatten till bassäng 1 med flödet r och (likaså fullständigt blandat) vatten flödar från bassäng 3 ut utanför bassängerna med flödet r.
Vid tiden $t = 0$ finns a_1, a_2 respektive a_3 (kg) salt i bassängerna.
Ställ upp ekvationer och villkor som bestämmer $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. (Du behöver inte lösa ekvationerna.)

7. (4p) Finn ett samband (utan derivator) som bestämmer $y(x)$ implicit, då

$$y' = \frac{x^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)} \quad \text{och} \quad y(0) = 3.$$

8a. (3p) Finn alla kritiska punkter för följande autonoma system. Avgör också för var och en av dem om den är en stabil eller instabil kritisk punkt för motsvarande lineariserade system

$$\begin{cases} x' = x - y^2 \\ y' = x^2 - y \end{cases}.$$

b. (1p) En av de kritiska punkterna i a. är ett centrum för det linjära systemet. Avgör, t.ex. genom att se vad som händer då man byter x mot y och y mot x, om den punkten är en stabil spiralpunkt, en instabil spiralpunkt eller ett centrum för det givna systemet.

9. (4p) En tunn kvadratisk platta med sidolängd π har den stationära temperaturen $u(x, y)$. Tre av sidorna har temperaturen 0. Bestäm temperaturen i plattan, om koordinatsystemet och den fjärde sidans temperatur är sådana att $u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0,\ u(x, \pi) = \sin 2x - \sin 3x$, då $0 < x, y < \pi$. Plattan utbyter värme med den omgivande luften (temperatur 0) enligt Newtons lag, så då $0 < x, y < \pi$ gäller $u''_{xx} + u''_{yy} = ku$, k en positiv konstant.

10a. (2p) Bestäm (fourier-)sinus-serien för den udda och 2π-periodiska funktionen $f(t)$ som ges av att $f(t) = 1$ för $0 < t < \pi$.

b. (2p) Använd resultatet i a. för att visa att

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{s^2+n^2} = \frac{\pi}{4s}\,\frac{1-e^{-s\pi}}{1+e^{-s\pi}} = \frac{\pi}{4s}\tanh\frac{s\pi}{2}, \quad s > 0$$

Utan bevis får användas att laplacetransformen av serien i a. kan tas termvis.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.

Kompletteringsskrivningen för de nästan godkända (Fx, K) planeras till

fr 30 november, kl. 15.15–17.00.

Information om sal och om vilka som får komplettera kommer på kurssidan.