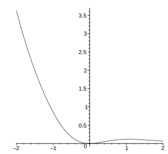
KTH Matematik

Lösningar tentamen 12 november 2007 i SF1633 (m.fl.), Differentialekvationer I

1. Vi söker $y(x)$ som uppfyller $y' + (2x+1)\,y = x\,e^{-x}$ och $y(0) = 0$.
Ekvationen är linjär av första ordningen. Integrerande faktor: $e^{\int (2x+1)\,dx} = e^{x^2+x}$. Då ekvationen multipliceras med den fås $(e^{x^2+x}y)' = e^{x^2+x}\,x\,e^{-x} = x\,e^{x^2} = (\frac{1}{2}e^{x^2})'$, så $e^{x^2+x}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, C en konstant, och alltså $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + C\,e^{-x^2-x}$. $y(0) = 0$ ger $\frac{1}{2} + C = 0$, så $C = -\frac{1}{2}$ och **Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x^2-x}}$.**



2. Vi söker den allmänna lösningen till $x\,y'' + (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = x\,e^{-x}$, $\quad x > 0$, då vi vet att $y_1(x) = e^{-x}$ och $y_2(x) = \ln x\,e^{-x}$ är lösningar till den homogena ekvationen $x\,y'' + (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0$, $\ x > 0$.
För att använda variation av parametrar skriver vi ekvationen $y'' + \frac{2x+1}{x}y' + \frac{x+1}{x}y = e^{-x}$ och lösningen som $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Det ger ekvationssystemet
$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & \ln x\,e^{-x} \\ -e^{-x} & (\frac{1}{x} - \ln x)e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$, med lösning
$u_1' = -x\,\ln x$, $u_2' = x$, så $u_1(x) = \int -x\,\ln x\,dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1$, c_1 konstant, och $u_2(x) = \frac{x^2}{2} + c_2$, c_2 konstant. Insättning ger
Svar: Den allmänna lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \frac{x^2}{4}e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2\ln x\,e^{-x}}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ godtyckliga konstanter.
[Minst lika enkelt kan man skriva lösningen $y(x) = u(x)e^{-x}$ och sätta in.]

3. Vi söker alla $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' = \mathcal{U}(t-1)$ och $y(0) = 1, y'(0) = -1$, där $\mathcal{U}$ är Heavisides stegfunktion.
Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$, $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 1$ och $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-1)\} = e^{-s}\frac{1}{s}$. Insättning i ekvationen ger $s^2Y(s) - s + 1 + sY(s) - 1 = \frac{e^{-s}}{s}$, dvs $(s^2+s)Y(s) = s(s+1)Y(s) = s + \frac{e^{-s}}{s}$.
Vi löser ut och partialbråksuppdelar, vilket ger $Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s+1}$. Eftersom $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ och $\mathcal{L}\{f(t-b)\mathcal{U}(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ (då $b \geq 0$) fås $y(t) = e^{-t} + (t-1)\,\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1) + e^{-(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1)$
Svar: $\boldsymbol{y(t) = e^{-t} + (t - 2 + e^{-(t-1)})\,\mathcal{U}(t-1)}$.
[Man kan också integrera $(y'e^t)' = \mathcal{U}(t-1)$ två gånger.]

4. Vi söker $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) - (-2)\cdot 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 2, 1$. Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = 1$: $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_ie^{\lambda_i t} = c_1\mathbf{k}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{k}_2e^{\lambda_2 t} = c_1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + c_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)e^{t}$. Villkoret $\mathbf{x}(0) = c_1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ger $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Det ger
$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$ och **Svar: Lösningen är $\boldsymbol{\begin{cases} x(t) = 4e^{2t} - e^t \\ y(t) = 2e^{2t} - e^t \end{cases}}$.**

5. Vi söker det minsta $a > 0$, så att funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ är ortogonala på $[0, a]$, dvs så att $\int_0^a \sin x\cos x\,dx = 0$.
Men $\int_0^a \sin x\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^a = \frac{1}{2}\sin^2 a$, så det sökta a är det minsta $a > 0$ med $\sin a = 0$, så **Svar: Det sökta $\boldsymbol{a = \pi}$.**

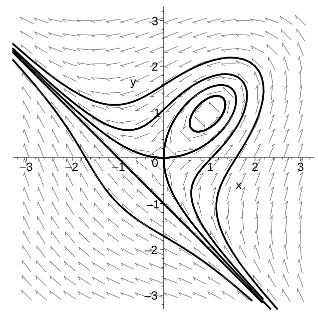
6. Vi söker ekvationer och villkor för $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, mängderna (kg) salt i bassängerna 1,2,3 (volymer V_1, V_2, V_3), då det flödar r (l/min): sötvatten till 1, $1 \to 3$, $2 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 1$ och ut från 3 och $2r$ (l/min) $1 \to 2$. Allt vatten som flödar är väl blandat.
Vid tiden $t = 0$ finns a_1, a_2, a_3 (kg) salt i bassängerna. Forts.

6. forts. Ändringen (per minut) av saltmängden i en bassäng ges helt av tillfört salt − bortfört salt och varje term ges av flöde×koncentration, så

Svar: Ekvationer $\begin{cases} \boldsymbol{x_1' = -3r\frac{x_1}{V_1} + r\frac{x_2}{V_2} + r\frac{x_3}{V_3}} \\ \boldsymbol{x_2' = 2r\frac{x_1}{V_1} - 2r\frac{x_2}{V_2}} \\ \boldsymbol{x_3' = r\frac{x_1}{V_1} + r\frac{x_2}{V_2} - 2r\frac{x_3}{V_3}} \end{cases}$, **villkor** $\begin{cases} \boldsymbol{x_1(0) = a_1} \\ \boldsymbol{x_2(0) = a_2} \\ \boldsymbol{x_3(0) = a_3} \end{cases}$.

7. Vi söker ett samband som bestämmer $y(x)$ implicit då $y' = \frac{x^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)}$ och $y(0) = 3$. Ekvationen är separabel. Vi skriver om den som $(y^2+1)\,y' = \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1+\frac{1}{x^2+1}$ och integrerar m.a.p. x. Det ger $\int(y^2+1)\,dy = \int(1+\frac{1}{x^2+1}\,dx$, dvs $\frac{y^3}{3}+y = x+\arctan x+C$, C en konstant som bestäms av villkoret att $y(0) = 3$: $\frac{3^3}{3}+3 = 0+\arctan 0+C$, så $C = 12$ och
Svar: $\boldsymbol{y(x)}$ **bestäms av** $\boldsymbol{\frac{y^3}{3} + y = x + \arctan x + 12}$**.**

8a. Vi söker kritiska punkter och deras stabilitet för det autonoma systemet $\begin{cases} x' = x - y^2 \\ y' = x^2 - y \end{cases}$. De kritiska punkterna är lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$. Den andra ekvationen säger att $y = x^2$ och då det sätts in i den första fås $x - x^4 = 0$, så (x reellt) $x = 0$ eller $x = 1$. Det ger de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$. För att linearisera kring dem använder vi jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, med egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm 1$. $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, så $(0,0)$ är en instabil kritisk punkt (en sadelpunkt).
$\mathbf{J}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, karakteristisk ekvation $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1+\lambda^2+4 = \lambda^2+3$ och egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$. Båda rent imaginära, så $(1,1)$ är ett centrum, en stabil (men inte asymptotiskt stabil) kritisk punkt (för det lineariserade systemet).



b. Om man byter x mot y och tvärtom, byter båda högerleden tecken, dvs det beskriver samma kurvor i fasplanet, men genomlöpta åt andra hållet. Att byta ut x och y innebär att man speglar i linjen $y = x$. Punkten $(1,1)$ speglas i sig själv, så om den vore en spiral, skulle den samtidigt vara instabil/asymptotiskt stabil och motsatsen. Omöjligt, så $(1,1)$ måste vara ett centrum också för det icke-linjära systemet.
Svar: a. Kritiska punkter: $\boldsymbol{(0,0)}$ (instabil) och $\boldsymbol{(1,1)}$ (stabil). b. Ett centrum.

9. I en kvadratisk platta, sidolängd π, är temperaturen $u(x,y)$. Den uppfyller ekvationen $u''_{xx} + u''_{yy} = ku$, k konstant. Randvillkoren är $u(0,y) = u(x,0) = u(\pi,y) = 0$ och $u(x,\pi) = \sin 2x - \sin 3x$, då $0 < x, y < \pi$. Vi söker $u(x,y)$.
Variabelseparation: Lösning av formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger $\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + k = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = Y(0) = 0. \end{cases}$
$X'' = -\lambda X,\ X(0) = X(\pi) = 0$ har lösningar (andra än 0) precis då $\lambda = n^2,\ n = 1, 2, \ldots$. De motsvarande lösningarna är $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n \sin nx \sinh\sqrt{n^2+k}\,y$.
Superposition ger vår allmänna lösning $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh\sqrt{n^2+k}\,y$.
Koefficienterna c_n bestäms av det inhomogena randvillkoret $u(x,\pi) = \sin 2x - \sin 3x,\ \ 0 < x < \pi$, dvs $c_2 \sinh\sqrt{4+k}\,\pi = 1,\ c_3 \sinh\sqrt{9+k}\,\pi = -1$ och övriga $c_n = 0$. Insättning ger
Svar: $\boldsymbol{u(x,y) = \sin 2x \frac{\sinh\sqrt{4+k}\,y}{\sinh\sqrt{4+k}\,\pi} - \sin 3x \frac{\sinh\sqrt{9+k}\,y}{\sinh\sqrt{9+k}\,\pi}}$**.**

10a. Sinus-serien för den udda 2π-periodiska $f(t)$, $f(t) = 1$ då $0 < x < \pi$ är $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$, där $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämnt} \end{cases}$.
Svar: a. Sinus-serien är $\boldsymbol{\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{4}{\pi n}\sin nt}$**.**
b. Laplacetransformen av $f(t)$, $t > 0$ är (2π-periodisk funktion) $\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\int_0^{\pi} e^{-st}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-e^{-st})\,dt\right) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{1}{s}(1-2e^{-\pi s}+e^{-2\pi s}) = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})}\frac{1}{s}(1-e^{-\pi s})^2 = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} = \frac{1}{s}\frac{e^{\frac{\pi}{2}s}-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{e^{\frac{\pi}{2}s}+e^{-\frac{\pi}{2}s}} = \frac{1}{s}\frac{\sinh\frac{\pi}{2}s}{\cosh\frac{\pi}{2}s} = \frac{1}{s}\tanh\frac{\pi}{2}s$.
Om man tar transformen av varje term i serien får man $\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{4}{\pi n}\frac{n}{s^2+n^2} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{4}{\pi}\frac{1}{s^2+n^2}$.
De båda uttrycken är lika, så $\boldsymbol{\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{s^2+n^2} = \frac{\pi}{4s}\tanh\frac{\pi}{2}s}$**, saken är klar.**