10.24.

$$\mathbf{E} = k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Flödet $\Phi = \iint\limits_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$

$$div\mathbf{E} = k\left\{\frac{1}{r^3} + x\frac{-3}{r^4}\frac{x}{r} + \text{cykl.}\right\}$$

$$div\mathbf{E} = k\left\{\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right\} = 0$$

Singulär punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, dvs origo.

Origo utanför S: Flödet $\Phi = 0$.

Origo innanför S.

Skär bort origo med sfären S_ε.

$$S_\varepsilon = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le \varepsilon^2\right\}.$$

Området mellan S_ε och S betecknas med K.

$$\boxed{\iint\limits_{S\quad S_\varepsilon} \mathbf{E}\cdot\ \hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \iiint\limits_{K} div\mathbf{E}\,dxdydz = 0}$$

$$\boxed{\iint\limits_{S} \mathbf{E}\cdot\ \hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = -\iint\limits_{S_\varepsilon} \mathbf{E}\cdot\ \hat{\mathbf{n}}_\varepsilon\,d\sigma}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}}_\varepsilon = -\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\mathbf{E}\ \ \hat{\mathbf{n}}_\varepsilon = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}\ \ \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon} = -\frac{k}{r\varepsilon} = \left\{\text{På } S_\varepsilon.\right\} = -\frac{k}{\varepsilon^2}}$$

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = +\iint_{S_\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon^2}\,d\sigma = \frac{k}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} d\sigma$$

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \frac{k}{\varepsilon^2}\ \text{Arean av}\ S_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = 4\pi k.$$

SVAR:

$$\text{Origo utanför } S:\ \text{Flödet } \Phi = 0.$$

$$\text{Origo innanför } S:\ \text{Flödet } \Phi = 4\pi k.$$