Efternamn Förnamn Personnummer Program

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

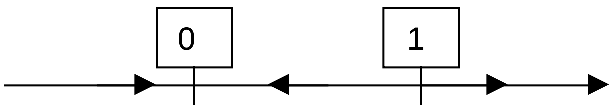
Version A.

KTH Matematik
SF1636, Matematik IV, för Bio2 &K2.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 17 september 2007, kl 10.30-11.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de stationära lösningarna till den autonoma differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y(y-1)$.
Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt.

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi får de stationära lösningarna $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$.
En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.
Nu över till studie av derivatans tecken.
För $y < 0$ och $y > 1$ är derivatan positiv och $y(t)$ är växande.
För $0 < y < 1$ är derivatan negativ och $y(t)$ är avtagande.



Den stationära lösningen $y_1 = 0$ är stabil och den stationära lösningen $y_2 = 1$ är instabil.
$\lim_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \leq 1\}$.

SVAR: $y_1 = 0$ är stabil och $y_2 = 1$ är instabil. $\lim_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \leq 1\}$.

2. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts.
En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Bestäm saltmängden som funktion av tiden.
……………………………………………………………………………………….

Lösningsförslag:

Låt $A(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t.

Vi erhåller följande differentialekvation för saltmängden

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2\ \ 5 - 3\ \frac{A(t)}{300 - t(3-2)}\ .$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen.
Vi löser den med hjälp av en integrerande faktor.
Omskrivning av differentialekvationen ger:

$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{3}{300-t} A(t) = 10\ .$$

Multiplicera med en integrerande faktor: $(300-t)^{-3}$.

$$(300-t)^{-3} \frac{dA(t)}{dt} + 3(300-t)^{-4} A(t) = 10(300-t)^{-3}$$

Detta kan skrivas:

$$\frac{d}{dt}\left\{A(t)(300-t)^{-3}\right\} = 10(300-t)^{-3}\ .$$

Integrera med avseende på t.

$$A(t)(300-t)^{-3} = 5(300-t)^{-2} + C.$$

Villkoret $A(0) = 1800$ ger:

$$1800(300)^{-3} = 5(300)^{-2} + C, \quad C = (300)^{-2}.$$

Insättning ger:

$$A(t) = 5(300-t) + \frac{(300-t)^3}{(300)^2}$$

Observera att tanken blir tom efter 300 minuter.

SVAR: Saltmängden ges av

$$A(t) = 5(300-t) + \frac{(300-t)^3}{(300)^2}\ .$$

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y-1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges.
Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

a) $y(0) = 2$ b) $y(0) = \frac{1}{2}$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

………………………………………………………………………………….

Lösningsförslag

Vi omformar differentialekvationen: $\frac{1}{y(y-1)} y' = 1$.

Partialbråksuppdelning ger: $\left\{ -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right\} y' = 1$.

Integrera med avseende på x.

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = x + \ln|C_1|$$

Lös ut y : $\frac{y-1}{y} = \pm C_1 e^x = Ce^x$, $1 - \frac{1}{y} = Ce^x$, $\frac{1}{y} = 1 - Ce^x$, $y = \frac{1}{1 - Ce^x}$.

a) $y(0) = 2$ ger: $C = \frac{1}{2}$ vilket ger $y = \frac{2}{2 - e^x}$ och existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$.
Då x växer från noll kommer y att växa obegränsat då x går mot $\ln 2$.

b) $y(0) = \frac{1}{2}$ ger: $C = -1$ vilket ger $y = \frac{1}{1 + e^x}$ och existensintervallet $\{x : x \in R\}$.
Då x växer från noll kommer y att gå mot noll då x växer obegränsat.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y = \frac{1}{1 - Ce^x}$.

a) $y = \frac{2}{2 - e^x}$, existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$ och y växer obegränsat.

b) $y = \frac{1}{1 + e^x}$, existensintervallet $\{x : x \in R\}$ och y går mot noll.

<u>Anmärkning:</u> Jämför uppgift 1 och uppgift 3.