Efternamn Förnamn Personnummer Program

............................ .................... ....................... ............

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

.....................................................

KTH Matematik
SF1636, Matematik IV, för Bio2 &K2.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 8 oktober 2007, kl 8.30-9.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen
$x^2 y \quad 4xy \ + 6y = x^3,\ x > 0$, då $y_1 = x^3$ och $y_2 = x^2$ är lösningar till motsvarande homogena differentialekvation.
Ange även den allmänna lösningen till differentialekvationen.

..........................................................................................

Lösningsförslag:

$y_1 = x^3$ och $y_2 = x^2$ är linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen.
Skriv om differentialekvationen på normalform.

$$y \quad 4x^{\ 1}y \ + 6x^{\ 2}y = x,\ x > 0$$

Vi ansätter en partikulärlösning: $y_p = x^3u(x) + x^2v(x)$.
Metoden "variation av parametrar" ger oss följande system.

$$\begin{matrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{matrix} \quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ x \end{matrix}$$

Systemdeterminanten((Wronskideterminanten) $W(x^3, x^2) = 2x^4 \quad 3x^4 = \quad x^4$.
Cramer´s regel ger oss:

$$u \ = \ \ x^{\ 4}\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x & 2x \end{vmatrix} = x^{\ 1}$$

$$v \ = \ \ x^{\ 4}\begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & x \end{vmatrix} = \ \ 1$$

integration med avseende på $x$ ger $\begin{matrix} u = \ln|x| \\ v = \ \ x \end{matrix}$.

Vi har erhållit partikulärlösningen: $y_p = x^3 \ln x \quad x^3$ , observera att $x > 0$.
Den allmänna lösningen är summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulär lösning. $y = y_h + y_p = Ax^3 + Bx^2 + x^3 \ln x \quad x^3 = Cx^3 + Bx^2 + x^3 \ln x$.

SVAR: En partikulärlösning till differentialekvationen är $y_p = x^3 \ln x \quad x^3$.
Den allmänna lösningen $y = Cx^3 + Bx^2 + x^3 \ln x$.

2 Bestäm allmänna lösningen till systemet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden och motsvarande egenvektorer.

Egenvärdena erhålles ur $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

Vi erhåller $0 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Insättning av respektive egenvärde i ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger motsvarande egenvektor.

$\underline{\lambda_1 = 2}$

$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, vilket ger en egenvektor $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 3}$

$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, vilket ger en egenvektor $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vid skilda reella egenvärden är den allmänna lösningen på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{X} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{K}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{K}_2$$

Insättning ger: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Bestäm först de stationära lösningarna till systemet $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 5x & 6y \\ 6x & x^2 \end{matrix}$ .

Klassificera därefter de stationära lösningarna med avseende på stabilitet/instabilitet samt med avseende på nod/spiral/sadelpunkt.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

De stationära lösningarna erhålles då tangentvektorn $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \mathbf{0}$.

Vi får då $\mathbf{0} = \begin{matrix} 5x & 6y \\ 6x & x^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 5x & 6y \\ x(6 & x) \end{matrix}$ .

De stationära lösningarna (kritiska punkterna) är (0,0) och (6,5).
Det icke-linjära systemet linjariseras med hjälp av Jacobimatrisen.

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 6 \quad 2x & 0 \end{matrix}$$

Insättning av respektive punkt ger en konstant matris, vilkens egenvärden bestämmes.

<u>(0,0)</u>

$\mathbf{J}(0,0) = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{matrix}$ . $0 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & \end{vmatrix} = {}^2 \quad 5 \quad + 36 = ( \quad \frac{5}{2})^2 \quad \frac{25}{4} + 36 = ( \quad \frac{5}{2})^2 + \frac{119}{4}$.

Egenvärdena är komplexa med positiv realdel.
Den stationära lösningen (0.0) till det linjariserade systemet är en instabil spiral. Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

<u>(6,5)</u>

$\mathbf{J}(6,5) = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{matrix}$ .

$0 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & \end{vmatrix} = {}^2 \quad 5 \quad 36 = ( \quad \frac{5}{2})^2 \quad \frac{25}{4} \quad 36 = ( \quad \frac{5}{2})^2 \quad \frac{169}{4} = ( \quad + 4)( \quad 9)$.

Egenvärdena är reella och har skilda tecken.
Den stationära lösningen (6.5) till det linjariserade systemet är en sadel och därmed instabil. Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De stationära lösningarna är (0,0) och (6,5).
(0,0) är en instabil spiral och (6,5) är en sadel och därmed instabil.