Efternamn Förnamn Personnummer Program

....

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

KTH Matematik

SF1636, Matematik IV, för Bio2 & K2.

Kontrollskrivning nr 3, torsdagen den 1 november 2007, kl 15.30-17.30.

BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

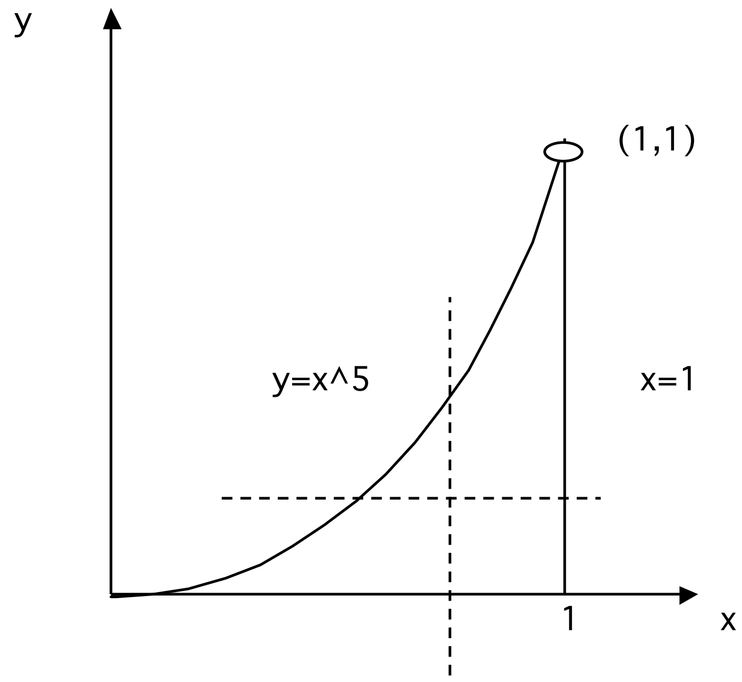
1. Beräkna dubbelintegralen

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^{1/5}}^{1}\frac{6dx}{1+x^6}\right)dy .$$

... ...

Lösningsförslag:

Integranden är svår att integrera med avseende på x.
Däremot går det bra att integrera med avseende på y.
Vi ritar upp området och kastar om integrationsordningen.



$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^{1/5}}^{1}\frac{6}{1+x^6}dx\right)dy=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x^5}\frac{6}{1+x^6}dy\right)dx=\int_{x=0}^{1}\frac{6x^5}{1+x^6}dx=\ln 2$$

SVAR: Dubbelintegralen

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^{1/5}}^{1}\frac{6}{1+x^6}dx\right)dy=\ln 2$$

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\square_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

där D ges av olikheterna $4 \quad x^2+y^2 \quad 9$, $0 \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \quad y \quad x$.

………………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Inför polära koordinater: $\begin{array}{l} x = r\cos \\ y = r\sin \end{array}$.

Området D beskrivs i polära koordinater.

$$D_r : \begin{array}{l} 2 \quad r \quad 3 \\ \frac{}{6} \qquad \frac{}{4} \end{array}$$

Integrationselementet $dxdy = rdrd$.

Insättning i dubbelintegralen ger:

$$_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = {}_{D_r} \frac{1}{r}rdrd = {}_{D_r} drd = (3 \quad 2)(\frac{}{4} \quad \frac{}{6}) = \frac{}{12}$$

SVAR: Den sökta dubbelintegralen blir:

$$_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \frac{}{12}.$$

3. Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av
▯▯▯olikheterna▯ $x^2 + y^2 + z^2 \quad 9, \; z \quad 2$

. ……………………………………………………………………………. ……………

Lösningsförslag:

Volymen av den ändliga kroppen ges av trippelintegralen $V = \quad_K dxdydz$.

Vi använder sfäriskt polära koordinater:
$$\begin{aligned} x &= r\sin \quad \cos \\ y &= r\sin \quad \sin \\ z &= r\cos \end{aligned} \qquad dxdydz = r^2 \sin \; drd \; d \quad .$$

Området D_{xyz} beskrivs i sfäriskt polära koordinater:

$$D_r \quad = (r, \;, \;): \frac{2}{\cos} \quad r \quad 3, \; 0 \qquad {}_0, \; 0 \qquad < 2$$, där $\cos \; _0 = \frac{2}{3}$.

$$V = \quad_K dxdydz = \int_{=0}^{2} \int_{=0}^{0} \int_{r=\frac{2}{\cos}}^{3} r^2 \sin \; dr \; d \quad d$$

$$V = \int_{=0}^{2} \int_{=0}^{0} (9 \quad \frac{8}{3\cos^3}) \sin \quad d \quad d \quad = \int_{=0}^{2} \left[9\cos \qquad \frac{4}{3\cos^2} \right]_{=0}^{0} d$$

$$V = \int_{=0}^{2} \left[9\cos \; _0 \qquad \frac{4}{3\cos^2 \; _0} + 9 + \frac{4}{3} \right] d \quad = 2 \quad 9(1 \quad \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(1 \quad \frac{9}{4}) \quad = 2 \quad \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

SVAR: Den sökta volymen är $V = \frac{8}{3}$.

<u>Anmärkning:</u>

En alternativ lösning är att först integrera med avseende på z.
Därefter integreras över en cirkelskiva med radien rot(5) genom att införa polära koordinater.