Efternamn Förnamn Personnummer Program

....

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

....

KTH Matematik

SF1636, Matematik IV, för Bio2 & K2.

Kontrollskrivning nr 4, torsdagen den 1 november 2007, kl 15.30-17.30.

BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Beräkna kurvintegralen□

$$\square_C (2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3})dx + (3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3})dy$$

där C är randkurvan till cirkelskivan som ges av olikheten $x^2 + y^2 \quad 4$.
Kurvan C tas i positiv riktning.

....

Lösningsförslag:

Den givna kurvan är sluten och tagen i positiv riktning.

Vi tillämpar Greens formel.

Det inneslutna området betecknas med D.

$$_C (2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3})dx + (3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3})dy = \ _D \ \frac{}{x}(3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3}) \quad \frac{}{y}(2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3}) \ dxdy$$

$$_C (2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3})dx + (3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3})dy = \ _D \left\{3 + e^{xy} + xye^{xy} \quad x^2 \quad (2 + e^{xy} + yxe^{xy} + y^2)\right\}dxdy$$

$$_C (2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3})dx + (3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3})dy = \ _D \left\{1 \quad x^2 \quad y^2\right\}dxdy$$

Vi inför polära koordinater.

$$_D \left\{1 \quad x^2 \quad y^2\right\}dxdy = \ _{D_r} \left\{1 \quad r^2\right\}rdrd \quad = 2 \ (\frac{2^2}{2} \quad \frac{2^4}{4}) = \quad 4$$

SVAR: Kurvintegralen

$$_C (2y + ye^{xy} + \frac{y^3}{3})dx + (3x + xe^{xy} \quad \frac{x^3}{3})dy = \quad 4$$

2. Bestäm en potential $U(x,y)$ till vektorfältet $\mathbf{F} = \left(2xy + ye^{xy}, x^2 \quad 3y^2 + xe^{xy}\right)$.

… …

Lösningsförslag:

En potential $U(x,y)$ uppfyller villkoret $gradU(x,y) = \mathbf{F}$.

Vi erhåller således följande system av partiella differentialekvationer:

$U_x = 2xy + ye^{xy} \qquad U(x,y) = x^2y + e^{xy} + g(y)$

$U_y = x^2 \quad 3y^2 + xe^{xy} \qquad U_y = x^2 \quad + xe^{xy} + g\ (y)$

De två uttrycken på U_y jämföres med varandra och vi erhåller: $g(y) = \quad 3y^2$.

Integration ger: $f(y) = \quad y^3 + C$.

En potential är $U(x,y) = x^2y + e^{xy} \quad y^3 + C$.

SVAR: En potential till vektorfältet är $U(x,y) = x^2y + e^{xy} \quad y^3 + C$.

3 Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = (x^2,\ 2y,\ z)$ ut ur $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

…….………………

Lösningsförslag:

Flödet ut ur sfären ges av

$$\underset{S}{}\ \mathbf{v}\ \ \hat{\mathbf{n}}\ \ dS$$

Här är enhetsnormalvektorn utåtriktad.

Vi använder divergenssatsen.

Då övergår flödesintegralen i en trippelintegral.

$$\underset{S}{}\ \mathbf{v}\ \ \hat{\mathbf{n}}\ \ dS = \underset{K}{}\ div\mathbf{v}\ \ dxdydz = \underset{K}{}\ div(x^2,\ 2y,\ z)\ \ dxdydz = \underset{K}{}\ (2x + 2 + 1)\ \ dxdydz$$

Integranden består av en del som är udda och den delen ger inget bidrag till Integralen ty området är origosymmetriskt.

Vi erhåller då

$$\underset{S}{}\ \mathbf{v}\ \ \hat{\mathbf{n}}\ \ dS = 3\ \underset{K}{}\ dxdydz\ = 3\frac{4\ \ R^3}{3}\ = 4\ \ R^3$$

SVAR: Flödet ut ur sfären är lika med $4\ \ R^3$.