Kraftfält : $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

Kurva γ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ \alpha \le t \le \beta$

Approximativ förflyttning : $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

Av kraftfältet uträttat arbete : $\mathbf{F}\ \ \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\ \ \mathbf{r}'(t)dt$

Hela arbetet längs kurvan γ : $\displaystyle\int_{t=\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\ \ \mathbf{r}'(t)dt$

Definition 1: Låt $\mathbf{F} = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en öppen mängd D $\quad$ R^2.

Om γ är en orienterad C^1 - kurva i D med parameterframställningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),\ \alpha \leq t \leq \beta$ så kallar vi uttrycket

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \ \ \mathbf{r}'(t)dt = \int_{t=\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] dt$$

för **kurvintegralen** av fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ längs kurvan γ.

Kurvintegralen betecknas med $\int_\gamma \mathbf{F}\ d\mathbf{r}$ eller $\int_\gamma P dx + Q dy$.

Kurvintegralen av **differentialformen** $P dx + Q dy$.

Kurvintegralen är oberoende av val av parameter :

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}(\varphi(u))\,du = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Omvänd omloppsriktning $-\gamma$: $\int_{-\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$

γ är styckvis C^1, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_n$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \ldots + \int_{\gamma_n} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Sluten : Begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller.

Enkel : Kurvan skär sig ej själv.

Cirkulationen av vektorfältet F längs den

enkla slutna kurvan γ : $\int_\gamma \mathbf{F} \; d\mathbf{r}$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad \mathbf{r}'(t)dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \quad \mathbf{T}ds$$ är arbetet som uträttas av kraften .

$$\mathbf{r}'(t)dt = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|dt = \mathbf{T}ds$$

där $\mathbf{T}$ är kurvans enhetstangent och $ds = |\mathbf{r}'(t)|dt$ är bågelementet.

Låt $\mathbf{N}$ vara kurvans högernormal av längden ett

och $\mathbf{u}$ ett vektorfält.

$\int_{\gamma} \mathbf{u} \quad \mathbf{N}ds$ representerar flödet i normalens riktning genom kurvan γ.

Sats 1 (Greens formel): Låt P och Q vara två C^1 − funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis C^1 − kurvor och som är positivt orienterad så är

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Areaberäkning:

$$\int_{\partial D} -y\,dx = \iint_D \left(-\frac{\partial \, -y}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D dxdy = \mu(D)$$

Flödet $\int_{\gamma} \mathbf{u} \quad \mathbf{N}\boldsymbol{ds}$

$\mathbf{T}\boldsymbol{ds} = (\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dy}) \qquad \mathbf{Nds} = (\mathbf{dy}, -\mathbf{dx}). \quad \mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2).$

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \quad \mathbf{N}\boldsymbol{ds} = \int_{\gamma} -\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{dy} = \iint_{\boldsymbol{D}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{y}} \right) \boldsymbol{dxdy}$$

ger flödet ut ur området D.

Lokala produktionen av strömmande substans $\quad \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{y}}.$

Definition 2. Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ kallas ett **potentialfält** eller ett **konservativt fält** i det öppna området Ω om det finns en C^1 − funktion U i Ω sådan att $\mathbf{F} = \textit{grad}\,U$.

Funktionen U kallas en **potential** till $\mathbf{F}$.

Differentialformen $Pdx + Qdy$ är **exakt** i Ω

om det finns en C^1 − funktion U i Ω vars

differential är $dU = Pdx + Qdy$

$\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält.

$$\Leftrightarrow$$

Differentialformen $Pdx + Qdy$ är exakt.

Sats 2. Låt $\mathbf{F} = (P,Q)$ vara ett potentialfält med potentialen U i det öppna området Ω. För varje kurva γ i Ω gäller då att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \; dr = U(b) - U(a)$$

där a och b är begynnelse- respektive slutpunkt för γ. Speciellt är kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \; dr$ oberoende av vägen.

Sats 3. Låt $\mathbf{F} = (P,Q)$ vara ett kontinuerligt vekorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω.

Om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \; dr$ är oberoende av vägen

så har **F** en potential i Ω.

Sats 4. Fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potentialfunktion U av klass C^2 i Ω.

Då är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

Sats 5. Om vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

i en enkelt sammanhängande öppen del Ω av planet

så har $\mathbf{F}$ en potential i Ω.