TRAPPFUNKTION Φ definierad på

$$\Delta = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

indelning i delrektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \le x \le x_i , y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij} :

$\Phi(x, y) = c_{ij}$ då (x,y) $\quad \Delta_{ij}$

Dubbelintegralen av Φ över Δ

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y)\,dxdy = \sum_{i,j} \mathrm{c}_{\mathrm{ij}}\mu(\Delta_{ij})$$

$\mu(\Delta_{ij})$ betyder arean av rektangeln Δ_{ij}.

Linjär

$$\iint_{\Delta} \alpha \Phi \, dxdy = \alpha \iint_{\Delta} \Phi \, dxdy$$

$$\iint_{\Delta} (\Phi + \Psi) \, dxdy = \iint_{\Delta} \Phi \, dxdy + \iint_{\Delta} \Psi \, dxdy$$

Monoton

$\Phi \leq \Psi$ på Δ $\qquad \iint_{\Delta} \Phi \, dxdy \leq \iint_{\Delta} \Psi \, dxdy$

Triangelolikheten för integraler

$$\left| \iint_{\Delta} \Phi \, dx\,dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Phi| \, dx\,dy$$

$$\Delta = \Delta_1 \qquad \Delta_2, \;\; \Delta_1 \cap \Delta_2 =$$

$$\iint_{\Delta} \Phi \, dx\,dy = \iint_{\Delta_1} \Phi \, dx\,dy + \iint_{\Delta_2} \Phi \, dx\,dy$$

$$\iint_{\Delta} \Phi(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} \Phi(x,y)\,dy \right) dx$$

Upprepad enkelintegration

Definition 1

Vi säger att den begränsade funktionen $f(x, y)$ är **Riemann - integrerbar** över rektangeln Δ om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $\iint_{\Delta} \Psi dxdy - \iint_{\Delta} \Phi dxdy < \varepsilon$

Sats 1: Om f är integrerbar över Δ så finns precis ett tal λ

med egenskapen att $\iint\limits_{\Delta} \Phi\,dxdy \leq \lambda \leq \iint\limits_{\Delta} \Psi\,dxdy$

för alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \leq f \leq \Psi$.

Definition 2

Låt f vara integrerbar över Δ. Det entydigt bestämda talet λ i sats 1 kallas **dubbelintegralen** av f över Δ och betecknas

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy \text{ eller kortare } \iint_{\Delta} f\,dxdy.$$

Sats2: Om f är en integrerbar funktion över rektangeln

$$\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx$$

så snart enkelintegralerna i högerledet existerar.

Motsvarande gäller vid omvänd integrationsordning i HL.

Sats 3: Om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så är f integrerbar över denna.

Vidare existerar den itererade enkelintegralen i

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Definition 3

Låt $f(x,y)$ vara en begränsad funktion på en begränsad mängd D och inför den utvidgade funktionen

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då } (x,y) \quad D \\ 0 & \text{då } (x,y) \quad D. \end{cases}$$

Vi säger att f är **integrerbar** över D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ D och vi sätter då $\iint_D f dxdy = \iint_\Delta f_D dxdy.$

Definition 4

En mängd N kallas en **nollmängd** om vi för varje tal $\varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallellella rektanglar vars sammanlagda area är högst ε.

En mängd kallas **kvadrerbar** om dess rand är en nollmängd.

Lemma 1: Grafen av en kontinuerlig funktion av en variabel

$y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ utgör en nollmängd.

Lemma 2: Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D. Då är f integrerbar över D.

Lemma 3: Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och $\iint_N f\,dxdy = 0$.

Sats 4: Om f är kontinuerlig på en mängd

$$D=\{(x,y):\alpha(x)\le y\le\beta(x),\ \ a\le x\le b\}$$

så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Medelvärdessatsen för integraler :

Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett kompakt kvadrerbart område D.

Då gäller att $\frac{1}{\mu(\mathrm{D})}\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)$.

$$\operatorname{diam} D_k = \sup |(x,y)-(x',y')| \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, n,$$

där supremum tages över alla punkter (x,y) och (x',y') i mängden D_k.

För varje funktion $f(x,y)$ på D kallas varje summa av formen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k),$$ där (ξ_k, η_k) är en godtycklig punkt i D_k eller på dess rand,

för en **Riemannsumma** till f i D.

Sats 5: Om f är kontinuerlig på D så gäller att

$$\sum_k \mathrm{f}(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k) \to \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

när indelningens finhet går mot noll .

Sats 6: Låt $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$ vara en bijektiv C^1 − avbildning av ett öppet begränsat, kvadrerbart område E i uv-planet på motsvarande område D i xy-planet, sådan att

$$J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0 \text{ i } E.$$

Då är $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$,

om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över resp. område.

Användningar av integraler .

1. Volymsberäkningar
2. Area av buktig yta.
3. Tröghetsmoment.
4. Masscentrum.

Volymen av kroppen K = $\iiint_K \mathrm{dxdydz}$.

En yta i rymden: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t), \quad (s,t) \quad D.$

Arean av Y $= \iint_D |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| \, ds\,dt.$

Tröghetsmomentet map axeln l : $\mathrm{J} = \iiint_K \rho(\mathrm{x,y,z})\{\mathrm{a}(\mathrm{x,y,z})\}^2 \, dxdydz$.

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) fås ur

$m \, (x_T, y_T, z_T) = \iiint_K (x,y,z) \; \rho(\mathrm{x,y\;z})\,dxdydz$, där $m = \iiint_K \rho(\mathrm{x,y,z})\,dxdydz$.