# Tolkningar i modal predikatlogik

En tolkning består av ett antal "världar", och till varje värld hör en predikatlogisk tolkning.

**Exempel** Betrakta sentensen $\Diamond A \to (A \lor \exists x \Diamond Fx \lor \Box(B \lor \forall x \forall y Gxy))$

den "verkliga" världen skrivs $w^*$

| | $u$ | $v$ | $w^*$ |
|---|---|---|---|
| Individdomän | $\{\alpha, \beta\}$ | $\{\beta, \gamma\}$ | $\emptyset$ |
| extensioner för predikaten | $F: \{\alpha\}$ | $F: \{\alpha, \gamma\}$ | $F: \{\alpha, \beta\}$ |
| | $G: \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle\}$ | $G: \{\langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$ | $G: \{\langle\alpha,\gamma\rangle\}$ |
| tilldelning av sanningsvärden till atomära sentenser | $A \mapsto 1$ | $A \mapsto 1$ | $A \mapsto 0$ |
| | $B \mapsto 0$ | $B \mapsto 1$ | $B \mapsto 0$ |

Tolkning med tre världar: $u$, $v$, $w^*$.

Vi skriver exempelvis
$v(D) = \{\beta, \gamma\}$
$v(F) = \{\alpha, \gamma\}$
$v(G) = \{\langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$
$v(A) = 1$
$v(B) = 1$

**Anmärkningar om tolkningar**

(i) Individdomänen får vara tom i en viss värld, men det måste finnas individer någonstans, det vill säga individdomänen får inte vara tom i alla världar.

(ii) Extensionen av exempelvis F får innehålla individer som finns i någon annan världs individdomän, men för att exempelvis $\forall x Fx$ ska vara sann i en viss värld räcker det att F är sann för alla individer i den världen.

(iii) Om man vill ha andra namn än standardnamnen (standard är $ref(a) = \alpha$, $ref(b) = \beta$ och så vidare) så måste de vara samma i alla världar.

Tillbaka till exemplet   I den här tolkningen gäller följande:

- $A$ är falsk eftersom $A$ är falsk i $w^*$ (den verkliga världen). Däremot är $\Diamond A$ sann.
- $\exists x \Diamond Fx$ är falsk eftersom det inte existerar någon individ alls i $w^*$. Däremot är $\Diamond \exists x Fx$ sann eftersom det finns en värld där $\exists x Fx$ är sann. Dessutom är $\Diamond \exists x \Box Fx$ sann eftersom det finns en värld ($u$) med en individ ($\alpha$) sådan att i varje värld är $F$ sann för denna individ.
- Vidare är $\forall x \forall y Gxy$
  - Sann i världen $u$ eftersom alla kombinationer av $\alpha$ och $\beta$ gör $G$ sann i denna värld. Vi behöver inte bry oss om $\gamma$ eftersom $\gamma$ inte finns i individdomänen i $u$.
  - falsk i världen $v$ eftersom exempelvis $\langle \beta, \beta \rangle$ inte gör $G$ sann i denna värld
  - Sann i $w^*$ eftersom individdomänen $w^*(D)$ är tom, och därmed är $Gxy$ sann för alla $x$ och $y$ i denna värld!
- $\Box(B \vee \forall x \forall y Gxy)$ är sann eftersom $B$ eller $\forall x \forall y Gxy$ är sann i alla världarna $u, v, w^*$. Alltså är sentensen $A \vee \exists x \Diamond Fx \vee \Box(B \vee \forall x \forall y Gxy)$ sann (det vill säga sann i världen $w^*$ – den aktuella världen). Det följer att
$$\Diamond A \rightarrow (A \vee \exists x \Diamond Fx \vee \Box(B \vee \forall x \forall y Gxy))$$
är sant i denna tolkning.
- $Fa$ är sann (ty $\alpha \in w^*(F)$)
  $\Box Fb$ är falsk (ty exempelvis $\beta \notin u(F)$)
  $\Diamond Fb$ är sann (ty $\beta \in w^*(F)$)
- $\Box \forall x \forall y \Diamond Gxy$ är sann (till skillnad från $\Box \forall x \forall y Gxy$, se ovan) eftersom $\forall x \forall y \Diamond Gxy$ är sann i varje värld. Exempelvis är $\forall x \forall y \Diamond Gxy$ sann i världen $v$ eftersom $\Diamond Gbb$, $\Diamond Gbc$, $\Diamond Gcb$, $\Diamond Gcc$ alla är sanna (vi kollar bara individer från världen $v$). På liknande sätt är sentensen sann i $u$. Att $\forall x \forall y$(vadsomhelst) är sant i $w^*$ beror på att det inte finns några individer i $w^*$.