Institutionen för matematik
KTH
Jan Kristoferson

Lösningar till KS1 i Logik för IT3, 10 oktober 2005

A1) Tablå för $(A \vee B) \to {\sim}C,\ C \,\&\, {\sim}B \ \models\ {\sim}A \,\&\, B$:

$$\begin{array}{rlcl}
 & \mathbb{T}: & (A \vee B) \to {\sim}C & \surd_3 \\
 & \mathbb{T}: & C \,\&\, {\sim}B & \surd_1 \\
 & \mathbb{F}: & {\sim}A \,\&\, B & \surd_6 \\
1 & \mathbb{T}: & C & \\
1 & \mathbb{T}: & {\sim}B & \surd_2 \\
2 & \mathbb{F}: & B &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl}
3 & \mathbb{F}: & (A \vee B) & \surd_4 \\
4 & \mathbb{F}: & A & \\
4 & \mathbb{F}: & B &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rlcl}
3 & \mathbb{T}: & {\sim}C & \surd_5 \\
5 & \mathbb{F}: & C & \\
 & & + &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl}
6 & \mathbb{F}: & {\sim}A & \surd_7 \\
7 & \mathbb{T}: & A & \\
 & & + &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rlc}
6 & \mathbb{F}: & B
\end{array}$$

Öppen väg

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är inte giltig.
I den öppna vägen läser man av tolkningen som visar detta: A, B falska och C sann.

B1) Tablå för ${\sim}A \to (B \,\&\, C),\ C \vee A \ \models\ {\sim}B \vee C$:

$$\begin{array}{rlcl}
 & \mathbb{T}: & {\sim}A \to (B \,\&\, C) & \surd_3 \\
 & \mathbb{T}: & C \vee A & \surd_6 \\
 & \mathbb{F}: & {\sim}B \vee C & \surd_1 \\
1 & \mathbb{F}: & {\sim}B & \surd_2 \\
1 & \mathbb{F}: & C & \\
2 & \mathbb{T}: & B &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl}
3 & \mathbb{F}: & {\sim}A & \surd_4 \\
4 & \mathbb{T}: & A &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rlcl}
3 & \mathbb{T}: & B \,\&\, C & \surd_5 \\
5 & \mathbb{T}: & B & \\
5 & \mathbb{T}: & C & \\
 & & + &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlc}
6 & \mathbb{T}: & C \\
 & & +
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rlc}
6 & \mathbb{T}: & A
\end{array}$$

Öppen väg

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är inte giltig.
I den öppna vägen läser man av tolkningen som visar detta: A, B sanna och C falsk.

A2) Vi skall visa: $A \to \sim(B \ \& \ C),\ B \vdash C \to \sim A$.
Strategi: Antag C och A och härled en motsägelse

1	(1)	$A \to \sim(B \ \& \ C)$	premiss
2	(2)	B	premiss
3	(3)	C	antagande
4	(4)	A	antagande
1,4	(5)	$\sim(B \ \& \ C)$	1,4 $\to$E
2,3	(6)	$B \ \& \ C$	2,3 &I
1,2,3,4	(7)	$\curlywedge$	5,6 $\sim$E
1,2,3	(8)	$\sim A$	4,7 $\sim$I
1,2	(9)	$C \to \sim A$	3,8 $\to$I

Eftersom sentensen på rad 9 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

B2) Vi skall visa: $(A \ \& \ B) \to \sim C,\ A \vdash C \to \sim B$.
Strategi: Antag C och B och härled en motsägelse

1	(1)	$(A \ \& \ B) \to \sim C$	premiss
2	(2)	A	premiss
3	(3)	C	antagande
4	(4)	B	antagande
2,4	(5)	$A \ \& \ B$	2,4 &I
1,2,4	(6)	$\sim C$	1,5 $\to$E
1,2,3,4	(7)	$\curlywedge$	6,3 $\sim$E
1,2,3	(8)	$\sim B$	4,7 $\sim$I
1,2	(9)	$C \to \sim B$	3,8 $\to$I

Eftersom sentensen på rad 9 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

A3) Låt $\mathcal{T}$ stå för $\sim \curlywedge$, en sentens som är sann i varje tolkning. Om vi t.ex. tar $p = \mathcal{T}$, $q = r = \curlywedge$, så blir α) uppfyllt (eftersom $\vDash p \to q$ inte gäller), medan β) ej blir uppfyllt.

SVAR: $\alpha) \Rightarrow \beta)$ **gäller inte**.

B3) Låt $\mathcal{T}$ stå för $\sim \curlywedge$, en sentens som är sann i varje tolkning. Om vi t.ex. tar $p = r = \curlywedge,\ q = \mathcal{T}$, så blir β) uppfyllt men inte α).

SVAR: $\beta) \Rightarrow \alpha)$ **gäller inte**.