KTH Matematik
B.Ek

$$\sim ((C \rightarrow (B \rightarrow \sim A)) \ \& \ (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$$

Svar till KS2 i Logik för D1, 26 april 2006

A1)

1. "Inte alla som kväker är grodor",
   dvs "Det är inte så att, för alla x, om x kväker så är x en groda",
   så svar: $\boldsymbol{\sim\forall x\,(Kx \rightarrow Gx)}$.
2. "Tjatte är lugn bara om minst en groda kväker",
   dvs "Lt bara om det finns x så att Gx och Kx",
   [minns att "$\ulcorner p \urcorner$ bara om $\ulcorner q \urcorner$" översätts $\ulcorner p \rightarrow q \urcorner$]
   så svar: $\boldsymbol{Lt \rightarrow \exists x\,(Gx \,\&\, Kx)}$.
3. "Alla grodor som är lugna kväker",
   dvs "För alla x, om x är en groda och x är lugn, kväker x",
   så svar: $\boldsymbol{\forall x\,((Gx \,\&\, Lx) \rightarrow Kx)}$ eller, ekvivalent, $\boldsymbol{\forall x\,(Gx \rightarrow (Lx \rightarrow Kx))}$.

B1)

1. "Alla trastar som är glada sjunger",
   dvs "För alla x, om x är en trast och x är glad, sjunger x",
   så svar: $\boldsymbol{\forall x\,((Tx \,\&\, Gx) \rightarrow Sx)}$ eller, ekvivalent, $\boldsymbol{\forall x\,(Tx \rightarrow (Gx \rightarrow Sx))}$.
2. "Fnatte är glad bara om minst en trast sjunger",
   dvs "Gf bara om det finns x så att Tx och Sx",
   [minns att "$\ulcorner p \urcorner$ bara om $\ulcorner q \urcorner$" översätts $\ulcorner p \rightarrow q \urcorner$]
   så svar: $\boldsymbol{Gf \rightarrow \exists x\,(Tx \,\&\, Sx)}$.
3. "Inte alla som sjunger är trastar",
   dvs "Det är inte så att, för alla x, om x sjunger så är x en trast",
   så svar: $\boldsymbol{\sim\forall x\,(Sx \rightarrow Tx)}$.

A2) Vi söker en tolkning som visar att $\exists x \sim Kx, \forall x\,(Fx \vee Kx) \nvDash \exists x\,(Fx \leftrightarrow Kx) \rightarrow \exists x \sim Fx$, dvs en tolkning som ger sentenserna till vänster sanningsvärdet 1 och sentensen till höger sanningsvärdet 0. Men implikationen är falsk precis om $\exists x\,(Fx \leftrightarrow Kx)$ är sann och $\exists x \sim Fx$ är falsk. Det senare innebär att F i den sökta tolkningen skall vara sann i hela domänen, dvs $\mathbf{Ext}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{D}$.
I så fall är $\forall x\,(Fx \vee Kx)$ också sann (som önskat) och $\exists x \sim Kx$, $\exists x\,(Fx \leftrightarrow Kx)$ sanna ger precis att K skall vara falsk för något element och sann för något, dvs $\mathbf{Ext}(\boldsymbol{K}) \neq \boldsymbol{D}, \varnothing$.

Vi leds till tolkningen

	F	K
α	$+$	$+$
β	$+$	$-$

dvs $D = \{\alpha, \beta\}$, $\text{Ext}(F) = D$, $\text{Ext}(K) = \{\alpha\}$

Den visar den önskade $\nvDash$, ty i den gäller att

- $\exists x \sim Kx$ är **sann**, ty $\sim Kb$ är sann, ty Kb är falsk, ty $\beta \notin \text{Ext}(K)$
- $\forall x\,(Fx \vee Kx)$ är **sann**, ty $Fa \vee Ka$ och $Fb \vee Kb$ är båda sanna,
  ty Fa och Fb är båda sanna, ty $\alpha, \beta \in \text{Ext}(F)$
- $\exists x\,(Fx \leftrightarrow Kx) \rightarrow \exists x \sim Fx$ är **falsk**,
  ty $\exists x\,(Fx \leftrightarrow Kx)$ är sann, ty $Fa \leftrightarrow Ka$ är sann,
  ty Fa och Ka är båda sanna, ty $\alpha \in \text{Ext}(F), \text{Ext}(K)$
  och $\exists x \sim Fx$ är falsk, ty $\sim Fa$ och $\sim Fb$ är båda falska,
  ty Fa och Fb är båda sanna, ty $\alpha, \beta \in \text{Ext}(F)$

B2) Vi söker en tolkning som visar att $\exists x \sim Gx,\ \exists x\,(Hx \leftrightarrow Gx) \nvDash \forall x\,(Hx \vee Gx) \rightarrow \exists x \sim Hx$, dvs en tolkning som ger sentenserna till vänster sanningsvärdet 1 och sentensen till höger sanningsvärdet 0. Men implikationen är falsk precis om $\forall x\,(Hx \vee Gx)$ är sann och $\exists x \sim Hx$ är falsk. Det senare innebär att H i den sökta tolkningen skall vara sann i hela domänen, dvs $\mathbf{Ext(}\boldsymbol{H}\mathbf{)} = \boldsymbol{D}$.
I så fall är $\forall x\,(Hx \vee Gx)$ sann (som önskat) och $\exists x \sim Gx,\ \exists x\,(Hx \leftrightarrow Gx)$ sanna ger precis att G skall vara falsk för något element och sann för något, dvs $\mathbf{Ext(}\boldsymbol{G}\mathbf{)} \neq \boldsymbol{D}, \varnothing$.

Vi leds till tolkningen $\begin{array}{c|cc} & G & H \\ \hline \alpha & + & + \\ \beta & - & + \end{array}$ dvs $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(H) = D$

Den visar den önskade $\nvDash$, ty i den gäller att

- $\exists x \sim Gx$ är **sann**, ty $\sim Gb$ är sann, ty Gb är falsk, ty $\beta \notin \mathrm{Ext}(G)$
- $\exists x\,(Hx \leftrightarrow Gx)$ är **sann**, ty $Ha \leftrightarrow Ga$ är sann,
  ty Ha och Ga är båda sanna, ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(G), \mathrm{Ext}(H)$
- $\forall x\,(Hx \vee Gx) \rightarrow \exists x \sim Hx$ är **falsk**,
  ty $\forall x\,(Hx \vee Gx)$ är sann, ty $Ha \vee Ga$ och $Hb \vee Gb$ är sanna,
  ty Ha och Hb är båda sanna, ty $\alpha, \beta \in \mathrm{Ext}(H)$
  och $\exists x \sim Hx$ är falsk, ty $\sim Ha$ och $\sim Hb$ är båda falska,
  ty Ha och Hb är båda sanna, ty $\alpha, \beta \in \mathrm{Ext}(H)$

A3) Vi skall visa att $\exists x\,(Gx \,\&\sim Hx),\ \forall x\,(Gx \rightarrow Lx) \vdash \sim\forall x\,(Lx \rightarrow Hx)$.
Idé: För att visa negationen gör vi antagandet $\forall x\,(Lx \rightarrow Hx)$ och försöker visa ⅄. För en senare ∃E antas $Ga \,\&\sim Ha$, så både Ga och $\sim Ha$, den förra ger med $Ga \rightarrow La$ och $La \rightarrow Ha$ Ha, så ⅄.

1	(1)	$\exists x\,(Gx \,\&\sim Hx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,(Gx \rightarrow Lx)$	premiss		
3	(3)	$\forall x\,(Lx \rightarrow Hx)$	antagande		
4	(4)	$Ga \,\&\sim Ha$	antagande		
2	(5)	$Ga \rightarrow La$	2	∀E	
4	(6)	Ga	4	&E	
2,4	(7)	La	5,6	→E	
3	(8)	$La \rightarrow Ha$	3	∀E	
2,3,4	(9)	Ha	8,7	→E	
4	(10)	$\sim Ha$	4	&E	
2,3,4	(11)	⅄	10,9	∼E	
1,2,3	(12)	⅄	1,4,11	∃E	[a inte i (1),(11),(2),(3)]
1,2	(13)	$\sim\forall x\,(Lx \rightarrow Hx)$	3,12	∼I	

Sentensen på rad 13 beror bara av premisserna på raderna 1 och 2. Saken är klar!

B3) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \rightarrow Kx),\ \exists x\,(Lx \,\&\sim Kx) \vdash \sim\forall x\,(Lx \rightarrow Fx)$.
Idé: För att visa negationen gör vi antagandet $\forall x\,(Lx \rightarrow Fx)$ och försöker visa ⅄. För en senare ∃E antas $La \,\&\sim Ka$, så både La och $\sim Ka$, den förra ger med $La \rightarrow Fa$ och $Fa \rightarrow Ka$ Ka, så ⅄.

1	(1)	$\forall x\,(Fx \rightarrow Kx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,(Lx \,\&\sim Kx)$	premiss		
3	(3)	$\forall x\,(Lx \rightarrow Fx)$	antagande		
4	(4)	$La \,\&\sim Ka$	antagande		
3	(5)	$La \rightarrow Fa$	3	∀E	
4	(6)	La	4	&E	
3,4	(7)	Fa	5,6	→E	
1	(8)	$Fa \rightarrow Ka$	1	∀E	
1,3,4	(9)	Ka	8,7	→E	
4	(10)	$\sim Ka$	4	&E	
1,3,4	(11)	⅄	10,9	∼E	
1,2,3	(12)	⅄	2,4,11	∃E	[a inte i (2),(11),(1),(3)]
1,2	(13)	$\sim\forall x\,(Lx \rightarrow Fx)$	3,12	∼I	

Sentensen på rad 13 beror bara av premisserna på raderna 1 och 2. Saken är klar!