KTH Matematik
B.Ek

$$((A \,\&\, C) \rightarrow B) \leftrightarrow (A \,\&\, (\sim C \rightarrow B))$$

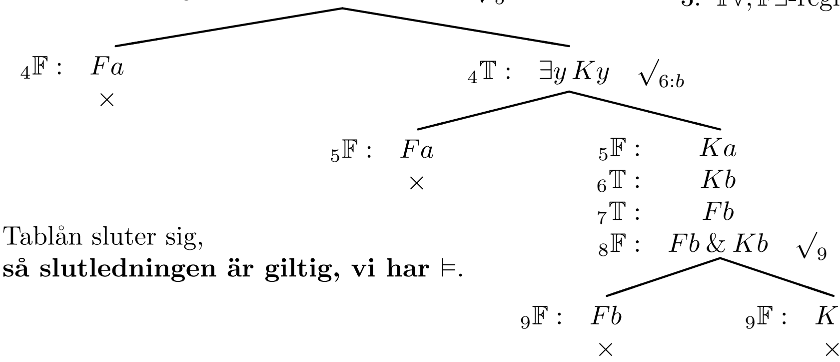
Svar till KS2 i Logik för D1 m.fl., 17 april 2007

A1)
a) ”Om Stina är glad, är alla som badar glada”,
dvs ”Om Gs så gäller för alla x att om Bx så Gx”,
så **svar:** $\boldsymbol{Gs \rightarrow \forall x\,(Bx \rightarrow Gx)}$.
b) ”Ett nödvändigt villkor för vattnet att vara kallt är att ingen badar”,
dvs ”Ett nödvändigt villkor för K är att det inte finns x så att Bx”,
dvs ”Om K så måste det vara så att det inte finns x så att Bx”,
så **svar:** $\boldsymbol{K \rightarrow \sim \exists x\, Bx}$.
c) ”Minst en som badar är inte glad”,
dvs ”Det finns x så att Bx och inte Gx”,
så **svar:** $\boldsymbol{\exists x\,(Bx \,\&\, \sim Gx)}$.

A2) För att avgöra om $\exists x\,(Fx \rightarrow \exists y\, Ky),\ \forall x\, Fx \ \vDash\ \exists x\,(Fx \,\&\, Kx)$ söker vi ett motexempel, dvs en tolkning som ger de vänstra sentenserna sanningsvärdet 1 och den högra värdet 0.

Tablå:

$\mathbb{T}:\ \exists x\,(Fx \rightarrow \exists y\, Ky)\quad \surd_{1:a}$
$\mathbb{T}:\ \forall x\, Fx\quad a:2, b:7$
$\mathbb{F}:\ \exists x\,(Fx \,\&\, Kx)\quad a:3, b:8$
${}_1\mathbb{T}:\ Fa \rightarrow \exists y\, Ky\quad \surd_4$
${}_2\mathbb{T}:\ Fa$
${}_3\mathbb{F}:\ Fa \,\&\, Ka\quad \surd_5$



I tablån växlar faserna enligt:

1. Satslogiska regler		4,5; 9
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$-reglerna		1; 6
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$-reglerna		2,3; 7,8

Tablån sluter sig,
så slutledningen är giltig, vi har $\vDash$.

A3) Vi skall visa att $\forall x\,(Gx \rightarrow Hx),\ \exists x\, Lx \rightarrow\ \sim \forall x\, Hx\ \vdash\ \sim \forall x\,(Gx \,\&\, Lx)$.
Idé: För att visa negationen gör vi antagandet $\forall x\,(Gx \,\&\, Lx)$ och försöker visa $\curlywedge$. $\forall$E ger $Ga \,\&\, La$, så Ga och med den första premissen Ha och $\forall x\, Hx$ ($\forall$I). Men också La, så $\exists x\, Lx$ och med premiss två $\sim \forall x\, Hx$, så $\curlywedge$.

1	(1)	$\forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, Lx \rightarrow\ \sim \forall x\, Hx$	premiss		
3	(3)	$\forall x\,(Gx \,\&\, Lx)$	antagande		
3	(4)	$Ga \,\&\, La$	3	$\forall$E	
3	(5)	Ga	4	&E	
1	(6)	$Ga \rightarrow Ha$	1	$\forall$E	
1,3	(7)	Ha	6,5	$\rightarrow$E	
1,3	(8)	$\forall x\, Hx$	7	$\forall$I	[a inte i (1),(3)]
3	(9)	La	4	&E	
3	(10)	$\exists x\, Lx$	9	$\exists$I	
2,3	(11)	$\sim \forall x\, Hx$	2,10	$\rightarrow$E	
1,2,3	(12)	$\curlywedge$	11,8	$\sim$E	
1,2	(13)	$\sim \forall x\,(Gx \,\&\, Lx)$	3,12	$\sim$I	

Sentensen på rad 13 beror bara av premisserna på raderna 1 och 2.
Saken är klar!

B1)

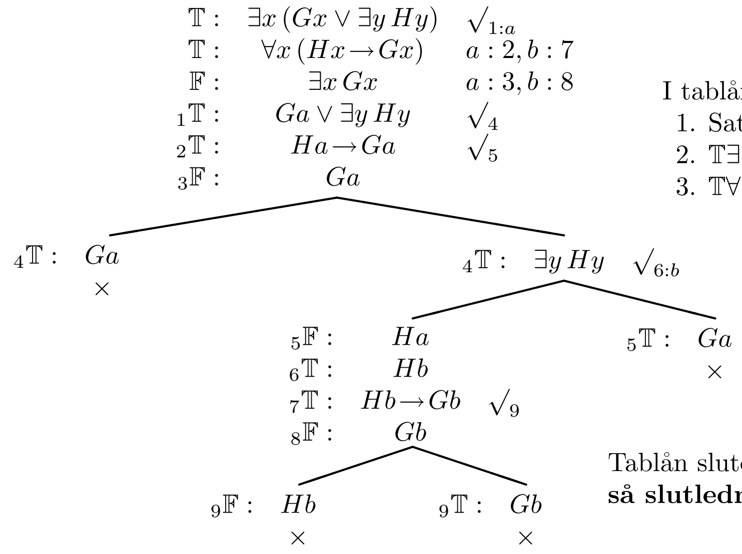
a) ”Minst en som cyklar trivs inte”,
dvs ”Det finns x så att Cx och inte Tx”,
så **svar:** $\boldsymbol{\exists x\,(Cx\,\&\,{\sim}Tx)}$.

b) ”Ett nödvändigt villkor för att det regnar är att ingen cyklar”,
dvs ”Ett nödvändigt villkor för R är att det inte finns x så att Cx”,
dvs ”Om R så måste det vara så att det inte finns x så att Cx”,
så **svar:** $\boldsymbol{R \rightarrow {\sim}\exists x\, Cx}$.

c) ”Om Greta trivs, trivs alla som cyklar”,
dvs ”Om Tg så gäller för alla x att om Cx så Tx”,
så **svar:** $\boldsymbol{Tg \rightarrow \forall x\,(Cx \rightarrow Tx)}$.

B2) För att avgöra om $\exists x\,(Gx \vee \exists y\, Hy)$, $\forall x\,(Hx \rightarrow Gx) \vDash \exists x\, Gx$ söker vi ett motexempel, dvs en tolkning som ger de vänstra sentenserna sanningsvärdet 1 och den högra värdet 0.

Tablå:



I tablån växlar faserna enligt:

1. Satslogiska regler	4,5;	9
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$-reglerna	1;	6
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$-reglerna	2,3;	7,8

Tablån sluter sig,
så slutledningen är giltig, vi har $\vDash$.

B3) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx\,\&\,Kx)$, $\exists x\, Fx \rightarrow {\sim}\forall x\, Mx \vdash {\sim}\forall x\,(Kx \rightarrow Mx)$.
Idé: För att visa negationen gör vi antagandet $\forall x\,(Kx \rightarrow Mx)$ och försöker visa $\curlywedge$. $\forall$E i första premissen ger $Fa\,\&\,Ka$, så Fa, så $\exists x\, Fx$ och med premiss två ${\sim}\forall x\, Mx$. Men också Ka och med antagandet Ma och $\forall x\, Mx$ ($\forall$I), så $\curlywedge$.

1	(1)	$\forall x\,(Fx\,\&\,Kx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, Fx \rightarrow {\sim}\forall x\, Mx$	premiss		
3	(3)	$\forall x\,(Kx \rightarrow Mx)$	antagande		
1	(4)	$Fa\,\&\,Ka$	1	$\forall$E	
1	(5)	Fa	4	&E	
1	(6)	$\exists x\, Fx$	5	$\exists$I	
1,2	(7)	${\sim}\forall x\, Mx$	2,6	$\rightarrow$E	
1	(8)	Ka	4	&E	
3	(9)	$Ka \rightarrow Ma$	3	$\forall$E	
1,3	(10)	Ma	9,8	$\rightarrow$E	
1,3	(11)	$\forall x\, Mx$	10	$\forall$I	[a inte i (1),(3)]
1,2,3	(12)	$\curlywedge$	7,11	${\sim}$E	
] 1,2	(13)	${\sim}\forall x\,(Kx \rightarrow Mx)$	3,12	${\sim}$I	

Sentensen på rad 13 beror bara av premisserna på raderna 1 och 2. **Saken är klar!**