Institutionen för matematik
KTH
Jan Kristoferson

Lösningar till KS3 i Logik för IT3, 24 november 2005

A1) Tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\text{Ext}(R)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\}$, $\text{Ext}(S)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}$ visar att

$$\forall x\,\forall y\,(Rxy \to Syx),\ \exists x\,\forall y\,Rxy \not\models \forall y\,\exists x\,Sxy,$$

ty i denna tolkning är

- $\forall x\,\forall y\,(Rxy \to Syx)$ sann, ty $\forall y\,(Ray \to Sya)$ och $\forall y\,(Rby \to Syb)$ är båda sanna, ty $Raa \to Saa$, $Rab \to Sba$, $Rba \to Sab$ och $Rbb \to Sbb$ är alla sanna, ty Saa och Sba är sanna, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \in \text{Ext}(S)$, medan Rba och Rbb är falska, ty $\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(R)$
- $\exists x\,\forall y\,Rxy$ sann, ty $\forall y\,Ray$ är sann, ty Raa och Rab är sanna, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle \in \text{Ext}(R)$
- $\forall y\,\exists x\,Sxy$ falsk, ty $\exists x\,Sxb$ är falsk, ty Sab och Sbb är båda falska, ty $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(S)$

B1) Tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\text{Ext}(P)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}$, $\text{Ext}(Q)=\{\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle\}$ visar att

$$\forall x\,\forall y\,(Pxy \lor Qyx),\ \exists x\,\forall y\ \sim Qxy \not\models \forall y\,\exists x\,Pxy,$$

ty i denna tolkning är

- $\forall x\,\forall y\,(Pxy \lor Qyx)$ sann, ty $\forall y\,(Pay \lor Qya)$ och $\forall y\,(Pby \lor Qyb)$ är båda sanna, ty $Paa \lor Qaa$, $Pab \lor Qba$, $Pba \lor Qab$ och $Pbb \lor Qbb$ är alla sanna, ty Paa, Qba, Pba och Qbb är sanna, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \in \text{Ext}(P)$ och $\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \in \text{Ext}(Q)$
- $\exists x\,\forall y\ \sim Qxy$ sann, ty $\forall y\ \sim Qay$ är sann, ty $\sim Qaa$ och $\sim Qab$ är sanna, ty Qaa och Qab är falska, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle \notin \text{Ext}(Q)$
- $\forall y\,\exists x\,Pxy$ falsk, ty $\exists x\,Pxb$ är falsk, ty Pab och Pbb är båda falska, ty $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(P)$

A2) Vi skall visa: $\exists x \forall y \sim Pxy \vdash \sim\forall x \exists y Pxy$

Strategi: Antag $\forall x \exists y Pxy$ och härled motsägelse. Gör antaganden för $\exists$E samt tillämpa $\forall$E på rätt sätt tills man får kvantifikatorfria sentenser.

1	(1)	$\exists x \forall y \sim Pxy$	premiss		
2	(2)	$\forall x \exists y Pxy$	antagande		
3	(3)	$\forall y \sim Pay$	antagande		
2	(4)	$\exists y Pay$	2	$\forall$E	
5	(5)	Pab	antagande		
3	(6)	$\sim Pab$	3	$\forall$E	
3,5	(7)	$\curlywedge$	6,5	$\sim$E	
2,3	(8)	$\curlywedge$	4,5,7	$\exists$E	[b inte i (4),(7),(3)]
1,2	(9)	$\curlywedge$	1,3,8	$\exists$E	[a inte i (1),(8),(2)]
1	(10)	$\sim\forall x \exists y Pxy$	2,9	$\sim$I	

Som sentensen på rad 10 bara beror av premissen på rad 1 är beviset klart.

B2) Vi skall visa: $\forall y \exists z \sim Qyz \vdash \sim\exists y \forall z Qyz$

Strategi: Antag $\exists y \forall z Qyz$ och härled motsägelse. Gör antaganden för $\exists$E samt tillämpa $\forall$E på rätt sätt tills man får kvantifikatorfria sentenser.

1	(1)	$\forall y \exists z \sim Qyz$	premiss		
2	(2)	$\exists y \forall z Qyz$	antagande		
3	(3)	$\forall z Qaz$	antagande		
1	(4)	$\exists z \sim Qaz$	1	$\forall$E	
5	(5)	$\sim Qab$	antagande		
3	(6)	Qab	3	$\forall$E	
3,5	(7)	$\curlywedge$	5,6	$\sim$E	
1,3	(8)	$\curlywedge$	4,5,7	$\exists$E	[b inte i (4),(7),(3)]
1,2	(9)	$\curlywedge$	2,3,8	$\exists$E	[a inte i (2),(8),(1)]
1	(10)	$\sim\exists y \forall z Qyz$	2,9	$\sim$I	

Som sentensen på rad 10 bara beror av premissen på rad 1 är beviset klart.

AB3)

a) För en tvåställig relation R gäller:
R reflexiv: $\forall x\, Rxx$,
R symmetrisk: $\forall x \forall y\, (Rxy \to Ryx)$,
R transitiv: $\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \;\&\; Ryz) \to Rxz)$.

b) I tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$ är R reflexiv (ty Raa, Rbb, Rcc alla sanna) och symmetrisk (ty $\langle\xi,\eta\rangle \in \mathrm{Ext}(R) \Rightarrow \langle\eta,\xi\rangle \in \mathrm{Ext}(R)$ för alla ξ,η), men inte transitiv (ty $Rab \;\&\; Rbc$ är sann, men inte Rac).
Således gäller R reflexiv, R symmetrisk $\nvDash$ R transitiv.
(En annan tolkning som visar samma sak är t.ex. $D = \mathbb{R}$ (reella talen) och Rxy tolkat som $|x-y| \leq 1$).