KTH Matematik
B.Ek

$$\forall x\,(\sim(A \to (B \to \curlywedge)) \vee \exists y \sim((A \,\&\, B) \to Rxy))$$

Svar till KS3 i Logik för D1, 10 maj 2006

A1) Vi skall visa att $\exists x\,\forall y\,(Pxy \vee Qxy) \nvDash \exists x\,(\forall y\,Pxy \vee \forall y\,Qxy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör $\exists x\,\forall y\,(Pxy \vee Qxy)$ sann och $\exists x\,(\forall y\,Pxy \vee \forall y\,Qxy)$ falsk. För att den första sentensen skall vara sann, måste det finnas ett element, α säg, med $\forall y\,(Pay \vee Qay)$ sann. Eftersom den andra sentensen skall vara falsk, skall samtidigt $\forall y\,Pay \vee \forall y\,Qay$ vara falsk, dvs $\forall y\,Pay$ och $\forall y\,Qay$ båda vara falska.
Detta går att ordna med en domän med minst två element, t.ex.:

$$D = \{\alpha, \beta\},\ \mathrm{Ext}(P) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle\},\ \mathrm{Ext}(Q) = \{\langle\alpha,\beta\rangle\}$$

Den ger nämligen

- $\exists x\,\forall y\,(Pxy \vee Qxy)$ **sann**, ty $\forall y\,(Pay \vee Qay)$ är sann, ty $Paa \vee Qaa$ och $Pab \vee Qab$ är båda sanna, ty Paa och Qab är sanna, (ty $\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathrm{Ext}(P)$ och $\langle\alpha,\beta\rangle \in \mathrm{Ext}(Q)$).
- $\exists x\,(\forall y\,Pxy \vee \forall y\,Qxy)$ **falsk**, ty $\forall y\,Pay \vee \forall y\,Qay$ och $\forall y\,Pby \vee \forall y\,Qby$ är falska, ty $\forall y\,Pay$, $\forall y\,Pby$, $\forall y\,Qay$, $\forall y\,Qby$ är alla falska, ty Pab, Pba, Qaa, Qba är alla falska (ty $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \notin \mathrm{Ext}(P)$, $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \notin \mathrm{Ext}(Q)$).

Saken är klar. (Resonemang med ”punkter och pilar” går också bra.)

B1) Vi skall visa att $\forall x\,(\exists y\,Rxy \,\&\, \exists y\,Sxy) \nvDash \forall x\,\exists y\,(Rxy \,\&\, Sxy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör $\forall x\,(\exists y\,Rxy \,\&\, \exists y\,Sxy)$ sann och $\forall x\,\exists y\,(Rxy \,\&\, Sxy)$ falsk. För att den andra sentensen skall vara falsk, måste det finnas ett element, α säg, med $\exists y\,(Ray \,\&\, Say)$ falsk. Eftersom den första sentensen skall vara sann, skall samtidigt $\exists y\,Ray \,\&\, \exists y\,Say$ vara sann, dvs $\exists y\,Ray$ och $\exists y\,Say$ båda vara sanna.
Detta (och att $\exists y\,Rby \ \&\ \exists y\,Sby$ är sann) går att ordna med en domän med minst två element, t.ex.:

$$D = \{\alpha, \beta\},\ \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\},\ \mathrm{Ext}(S) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle\}$$

Den ger nämligen

- $\forall x\,(\exists y\,Rxy \,\&\, \exists y\,Sxy)$ **sann**, ty $\exists y\,Ray \,\&\, \exists y\,Say$ och $\exists y\,Rby \,\&\, \exists y\,Sby$ är sanna, ty $\exists y\,Ray$, $\exists y\,Rby$, $\exists y\,Say$, $\exists y\,Sby$ är alla sanna, ty Raa, Rba, Sab, Sbb är sanna, (ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \in \mathrm{Ext}(R)$ och $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \in \mathrm{Ext}(S)$).
- $\forall x\,\exists y\,(Rxy \,\&\, Sxy)$ **falsk**, ty $\exists y\,(Ray \,\&\, Say)$ är falsk, ty $Raa \,\&\, Saa$ och $Rab \,\&\, Sab$ är båda falska, ty Saa och Rab är falska (ty $\langle\alpha,\alpha\rangle \notin \mathrm{Ext}(S)$, $\langle\alpha,\beta\rangle \notin \mathrm{Ext}(R)$).

Saken är klar. (Resonemang med ”punkter och pilar” går också bra.)

A2) Vi skall visa att $\forall x\,\forall y\,(Rxy \to Sxy)\ \vdash\ \exists x\,\forall y\,(Sxy \to x \neq y) \to \exists x \sim Rxx$.
Idé: Antag $\exists x\,\forall y\,(Sxy \to x \neq y)$, då gäller $\forall y\,(Say \to a \neq y)$ för något a, så $\sim Saa$. Premissen ger då $\sim Raa$.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,(Rxy \to Sxy)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\forall y\,(Sxy \to x \neq y)$	antagande		
3	(3)	$\forall y\,(Say \to a \neq y)$	antagande		
3	(4)	$Saa \to a \neq a$	3	$\forall$E	
5	(5)	Raa	antagande		
1	(6)	$\forall y\,(Ray \to Say)$	1	$\forall$E	
1	(7)	$Raa \to Saa$	6	$\forall$E	
1,5	(8)	Saa	7,5	$\to$E	
1,3,5	(9)	$a \neq a$	4,8	$\to$E	
	(10)	$a = a$		$=$I	
1,3,5	(11)	$\curlywedge$	9,10	$\sim$E	
1,3	(12)	$\sim Raa$	5,11	$\sim$I	
1,3	(13)	$\exists x \sim Rxx$	12	$\exists$I	
1,2	(14)	$\exists x \sim Rxx$	2,3,13	$\exists$E	[a inte i (2),(13),(1)]
1	(15)	$\exists x\,\forall y\,(Sxy \to x \neq y) \to \exists x \sim Rxx$	2,14	$\to$I	

Eftersom sentensen på rad 15 bara beror av premissen på rad 1 är **beviset klart**.

B2) Vi skall visa att $\exists x\,\forall y\,(Qxy \to x \neq y) \;\vdash\; \forall x\,\forall y\,(Pxy \to Qxy) \to \exists x \sim Pxx$.
Idé: Premissen $\exists x\,\forall y\,(Qxy \to x \neq y)$ ger $\forall y\,(Qay \to a \neq y)$ för något a, så $\sim Qaa$. Antagandet $\forall x\,\forall y\,(Pxy \to Qxy)$ ger då $\sim Paa$.

1	(1)	$\exists x\,\forall y\,(Qxy \to x \neq y)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,\forall y\,(Pxy \to Qxy)$	antagande		
3	(3)	$\forall y\,(Qay \to a \neq y)$	antagande		
3	(4)	$Qaa \to a \neq a$	3	$\forall$E	
5	(5)	Paa	antagande		
2	(6)	$\forall y\,(Pay \to Qay)$	2	$\forall$E	
2	(7)	$Paa \to Qaa$	6	$\forall$E	
2,5	(8)	Qaa	7,5	$\to$E	
2,3,5	(9)	$a \neq a$	4,8	$\to$E	
	(10)	$a = a$		=I	
2,3,5	(11)	$\curlywedge$	9,10	$\sim$E	
2,3	(12)	$\sim Paa$	5,11	$\sim$I	
2,3	(13)	$\exists x \sim Pxx$	12	$\exists$I	
1,2	(14)	$\exists x \sim Pxx$	1,3,13	$\exists$E	[a inte i (1),(13),(2)]
1	(15)	$\forall x\,\forall y\,(Pxy \to Qxy) \to \exists x \sim Pxx$	2,14	$\to$I	

Eftersom sentensen på rad 15 bara beror av premissen på rad 1 är **beviset klart**.

A3) Vi har att $\mathcal{R}pq$ betyder $\not\models p \vee q$.
Att $\mathcal{R}$ är *reflexiv* betyder att $\mathcal{R}pp$ är sann för alla p, men om p är $\sim\curlywedge$ (eller $A \vee \sim A$) är $p \vee p$ sann i alla tolkningar, så $\models p \vee p$, dvs $\mathcal{R}pp$ falsk. Således: $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ **är inte reflexiv**.
Att $\mathcal{R}$ är *symmetrisk* betyder att för alla p, q gäller att $\mathcal{R}qp$ är sann om $\mathcal{R}pq$ är det. Dvs att $\not\models q \vee p$ är sann om $\not\models p \vee q$ är det. Eftersom $p \vee q \equiv q \vee p$ är detta sant, så $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ **är symmetrisk**.
Att $\mathcal{R}$ är *transitiv* betyder att för alla p, q, r gäller att $\mathcal{R}pr$ är sann om både $\mathcal{R}pq$ och $\mathcal{R}qr$ är det. Men om p är A, q är B och r är $\sim A$, gäller $\not\models p \vee q$ och $\not\models q \vee r$ (eftersom varken $A \vee B$ eller $B \vee \sim A$ är sann i varje tolkning), dvs $\mathcal{R}pq, \mathcal{R}qr$ sanna, men $p \vee r$ är $A \vee \sim A \equiv \sim\curlywedge$, så $\models p \vee r$, så $\mathcal{R}pr$ är falsk, så $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ **är inte transitiv**.

B3) Vi har att $\mathcal{S}pq$ betyder $p \,\&\, q \not\models \curlywedge$.
Att $\mathcal{S}$ är *reflexiv* betyder att $\mathcal{S}pp$ är sann för alla p, men om p är $\curlywedge$ (eller $A \,\&\! \sim A$) är $p \,\&\, p$ falsk i alla tolkningar, så $p \,\&\, p \models \curlywedge$, dvs $\mathcal{S}pp$ falsk. Således: $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **är inte reflexiv**.
Att $\mathcal{S}$ är *symmetrisk* betyder att för alla p, q gäller att $\mathcal{S}qp$ är sann om $\mathcal{S}pq$ är det, dvs att $q \,\&\, p \not\models \curlywedge$ om $p \,\&\, q \not\models \curlywedge$. Men $p \,\&\, q \equiv q \,\&\, p$, så det gäller och $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **är symmetrisk**.
Att $\mathcal{S}$ är *transitiv* betyder att för alla p, q, r gäller att $\mathcal{S}pr$ är sann om både $\mathcal{S}pq$ och $\mathcal{S}qr$ är det. Men om p är A, q är B och r är $\sim A$, gäller $p \,\&\, q \not\models \curlywedge$ och $q \,\&\, r \not\models \curlywedge$ (eftersom varken $A \,\&\, B$ eller $B \,\&\! \sim A$ är falsk i varje tolkning), dvs $\mathcal{S}pq, \mathcal{S}qr$ sanna, men $p \,\&\, r$ är $A \,\&\! \sim A \equiv \curlywedge$, så $p \,\&\, r \models \curlywedge$, så $\mathcal{S}pr$ är falsk, så $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **är inte transitiv**.