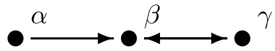
KTH Matematik
B.Ek

$$\forall x\,(\forall y\,(A\,\&\,Vxy) \to B) \leftrightarrow \exists x\,(A\,\&\,(\exists y \sim Vxy \to B))$$

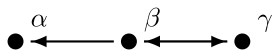
Svar till KS3 i Logik för D1 m.fl., 7 maj 2007

A1) För att visa att
$\forall x\,\exists y\,(x \neq y\,\&\,Qxy)$, $\exists x\,\exists y \sim(Qxy \leftrightarrow Qyx) \not\models \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Qxy\,\&\,Qyz) \to Qzx)$.
söker vi en tolkning som gör P1: $\forall x\,\exists y\,(x \neq y\,\&\,Qxy)$ och P2: $\exists x\,\exists y \sim(Qxy \leftrightarrow Qyx)$ sanna och S: $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Qxy\,\&\,Qyz) \to Qzx)$ falsk.
Enligt P1 (med "punkter och pilar") går från varje punkt (minst) en pil till en annan punkt. Enligt P2 finns två punkter (olika, tydligen) med precis en pil mellan sig (dvs bara åt ena hållet). För att S skall vara falsk krävs att det finns två pilar efter varandra utan någon pil från den andras slut till den förstas början.
Låt det (enligt P2) gå en pil från α till β, men ingen från β till α. Enligt P1 går en pil från β till en annan punkt, inte α. Kalla den punkten γ. Om ingen pil går från γ till α är S falsk, som önskat, men någon pil skall gå från γ till en annan punkt. Till β går bra, så vi finner tolkningen
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(Q) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle\}$



Den gör P1, P2 sanna och S falsk. **Saken är klar**.
T. ex. $\mathrm{Ext}(Q) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle\}$ går också bra.

B1) För att visa att
$\exists x\,\exists y \sim(Txy \leftrightarrow Tyx)$, $\forall x\,\exists y\,(x \neq y\,\&\,Tyx) \not\models \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Txy\,\&\,Tyz) \to Tzx)$.
söker vi en tolkning som gör P1: $\exists x\,\exists y \sim(Txy \leftrightarrow Tyx)$ och P2: $\forall x\,\exists y\,(x \neq y\,\&\,Tyx)$ sanna och S: $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Txy\,\&\,Tyz) \to Tzx)$ falsk.
Enligt P1 (med "punkter och pilar") finns två punkter (olika, tydligen) med precis en pil mellan sig (dvs bara åt ena hållet). Enligt P2 går till varje punkt (minst) en pil från en annan punkt. För att S skall vara falsk krävs att det finns två pilar efter varandra utan någon pil från den andras slut till den förstas början.
Låt det (enligt P1) gå en pil från β till α, men ingen från α till β. Enligt P2 kommer en pil till β från en annan punkt, inte α. Kalla den punkten γ. Om ingen pil går från α till γ är S falsk, som önskat, men någon pil skall komma till γ från en annan punkt. Från β går bra, så vi finner tolkningen
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(T) = \{\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle\}$



Den gör P1, P2 sanna och S falsk. **Saken är klar**.
T. ex. $\mathrm{Ext}(T) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle\}$ går också bra.

A2) Vi skall visa att $\exists x\,\forall y\,Pyx \ \vdash\ \exists x \sim Pxx \to \exists x\,\exists y\,x \neq y$.
Idé: För att visa implikationen antar vi förstås $\exists x \sim Pxx$. Premissen ger $\forall y\,Pya$ för något a (dvs antagande för $\exists$E). Å andra sidan ger antagandet $\sim Pbb$, något b. Antagandet $a = b$ ger $\curlywedge$...

1	(1)	$\exists x\,\forall y\,Pyx$	premiss		
2	(2)	$\exists x \sim Pxx$	antagande		
3	(3)	$\forall y\,Pya$	antagande		
4	(4)	$\sim Pbb$	antagande		
3	(5)	Pba	3	$\forall$E	
6	(6)	$a = b$	antagande		
3,6	(7)	Pbb	6,5	$=$E	
3,4,6	(8)	$\curlywedge$	4,7	$\sim$E	
3,4	(9)	$a \neq b$	6,8	$\sim$I	
3,4	(10)	$\exists y\,a \neq y$	9	$\exists$I	
3,4	(11)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	10	$\exists$I	
2,3	(12)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	2,4,11	$\exists$E	[b inte i (2),(11),(3)]
1,2	(13)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	1,3,12	$\exists$E	[a inte i (1),(12),(2)]
1	(14)	$\exists x \sim Pxx \to \exists x\,\exists y\,x \neq y$	2,13	$\to$I	

Sentensen på rad 14 beror bara av premissen på rad 1. **Saken är klar!**

B2) Vi skall visa att $\exists x \sim Rxx \ \vdash \ \exists x \forall y\, Rxy \rightarrow \exists x \exists y\, x \neq y$.
Idé: För att visa implikationen antar vi förstås $\exists x \forall y\, Rxy$. Premissen ger $\sim Raa$ för något a (dvs antagande för ∃E). Å andra sidan ger antagandet $\forall y\, Rby$, något b. Antagandet $b = a$ ger $\curlywedge$...

1	(1)	$\exists x \sim Rxx$	premiss		
2	(2)	$\exists x \forall y\, Rxy$	antagande		
3	(3)	$\sim Raa$	antagande		
4	(4)	$\forall y\, Rby$	antagande		
4	(5)	Rba	4	∀E	
6	(6)	$b = a$	antagande		
4,6	(7)	Raa	6,5	=E	
3,4,6	(8)	$\curlywedge$	3,7	~E	
3,4	(9)	$b \neq a$	6,8	~I	
3,4	(10)	$\exists y\, b \neq y$	9	∃I	
3,4	(11)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	10	∃I	
2,3	(12)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	2,4,11	∃E	[b inte i (2),(11),(3)]
1,2	(13)	$\exists x \exists y\, x \neq y$	1,3,12	∃E	[a inte i (1),(12),(2)]
1	(14)	$\exists x \forall y\, Rxy \rightarrow \exists x \exists y\, x \neq y$	2,13	→I	

Sentensen på rad 14 beror bara av premissen på rad 1. **Saken är klar!**

A3) $\mathcal{R}$ är en **symmetrisk** binär relation på $\mathcal{D}$ och $\mathcal{R}'$ på $\mathcal{D}$ ges av att $\mathcal{R}'ab$ är sann omm för något $n \geq 0$ finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{R}ac_1, \mathcal{R}c_1c_2, \ldots, \mathcal{R}c_nb$ sanna.
Att $\mathcal{R}'$ är *reflexiv* betyder att $\mathcal{R}'aa$ är sann för alla $a \in \mathcal{D}$, men om $\mathcal{R}ac$ är falsk för alla $c \in \mathcal{D}$ är $\mathcal{R}'aa$ tydligen falsk, så exemplet $\mathcal{R}$ med $\mathcal{R}bc$ falsk för alla $b, c \in \mathcal{D}$ (som är symmetrisk) visar: **$\mathcal{R}'$ behöver inte vara reflexiv**.
Att $\mathcal{R}'$ är *symmetrisk* betyder att för alla $a, b \in \mathcal{D}$ gäller att $\mathcal{R}'ba$ är sann om $\mathcal{R}'ab$ är det. Att $\mathcal{R}'ab$ är sann betyder att det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{R}ac_1, \mathcal{R}c_1c_2, \ldots, \mathcal{R}c_nb$ sanna, så (eftersom $\mathcal{R}$ är symmetrisk) $\mathcal{R}bc_n, \ldots, \mathcal{R}c_2c_1, \mathcal{R}c_1a$ sanna och alltså också $\mathcal{R}'ba$ sann. Så **$\mathcal{R}'$ är säkert symmetrisk**.
Att $\mathcal{R}'$ är *transitiv* betyder att för alla $a, b, d \in \mathcal{D}$ gäller att $\mathcal{R}'ad$ är sann om både $\mathcal{R}'ab$ och $\mathcal{R}'bd$ är det. Men om $\mathcal{R}'ab$ är sann finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{R}ac_1, \ldots, \mathcal{R}c_nb$ sanna och om $\mathcal{R}'bd$ är sann finns $e_1, e_2, \ldots, e_m \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{R}be_1, \ldots, \mathcal{R}e_md$ sanna, så det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n, b, e_1, e_2, \ldots, e_m$ med $\mathcal{R}ac_1, \ldots, \mathcal{R}c_nb, \mathcal{R}be_1, \ldots, \mathcal{R}e_md$ sanna, så $\mathcal{R}'ad$ blir sann, så **$\mathcal{R}'$ är säkert transitiv**.

B3) $\mathcal{S}$ är en **symmetrisk** binär relation på $\mathcal{D}$ och $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{D}$ ges av att $\mathcal{S}'ab$ är sann omm för något $n \geq 0$ finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{S}ac_1, \mathcal{S}c_1c_2, \ldots, \mathcal{S}c_nb$ sanna.
Att $\mathcal{S}'$ är *reflexiv* betyder att $\mathcal{S}'aa$ är sann för alla $a \in \mathcal{D}$, men om $\mathcal{S}ac$ är falsk för alla $c \in \mathcal{D}$ är $\mathcal{S}'aa$ tydligen falsk, så exemplet $\mathcal{S}$ med $\mathcal{S}bc$ falsk för alla $b, c \in \mathcal{D}$ (som är symmetrisk) visar: **$\mathcal{S}'$ behöver inte vara reflexiv**.
Att $\mathcal{S}'$ är *symmetrisk* betyder att för alla $a, b \in \mathcal{D}$ gäller att $\mathcal{S}'ba$ är sann om $\mathcal{S}'ab$ är det. Att $\mathcal{S}'ab$ är sann betyder att det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{S}ac_1, \mathcal{S}c_1c_2, \ldots, \mathcal{S}c_nb$ sanna, så (eftersom $\mathcal{S}$ är symmetrisk) $\mathcal{S}bc_n, \ldots, \mathcal{S}c_2c_1, \mathcal{S}c_1a$ sanna och alltså också $\mathcal{S}'ba$ sann. Så **$\mathcal{S}'$ är säkert symmetrisk**.
Att $\mathcal{S}'$ är *transitiv* betyder att för alla $a, b, d \in \mathcal{D}$ gäller att $\mathcal{S}'ad$ är sann om både $\mathcal{S}'ab$ och $\mathcal{S}'bd$ är det. Men om $\mathcal{S}'ab$ är sann finns $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{S}ac_1, \ldots, \mathcal{S}c_nb$ sanna och om $\mathcal{S}'bd$ är sann finns $e_1, e_2, \ldots, e_m \in \mathcal{D}$ med $\mathcal{S}be_1, \ldots, \mathcal{S}e_md$ sanna, så det finns $c_1, c_2, \ldots, c_n, b, e_1, e_2, \ldots, e_m$ med $\mathcal{S}ac_1, \ldots, \mathcal{S}c_nb, \mathcal{S}be_1, \ldots, \mathcal{S}e_md$ sanna, så $\mathcal{S}'ad$ blir sann, så **$\mathcal{S}'$ är säkert transitiv**.