**KTH Matematik**
Bengt Ek
Maj 2005

Kompletteringsmaterial till kursen 5B1928 Logik för D1:

# K2 Något om modeller, kompakthetssatsen

Vi skall presentera ett enkelt (om man känner till sundhets- och fullständighetssatsen för naturlig deduktion eller något annat härledningssystem) resultat, **kompakthetssatsen**, som har konsekvenser för vad som kan och inte kan uttryckas med predikatlogik.

Vi påminner oss begreppet modell för en mängd sentenser i ett predikatlogiskt språk:
En tolkning är en **modell** för en mängd $\Delta$ av sentenser i språket om alla sentenser i $\Delta$ är sanna i tolkningen. Vi intresserar oss nu både för ändliga och oändliga mängder av sentenser.

**Kompakthetssatsen:**
Om en mängd sentenser $\Delta$ är sådan att det finns en modell för varje ändlig delmängd av $\Delta$, så finns det en modell för hela $\Delta$.

(Eller ekvivalent: Om det inte finns någon modell för $\Delta$ så finns det en ändlig delmängd av $\Delta$ som saknar modell.)

Vi skall se hur denna sats följer ur **sundhets- och fullständighetssatsen** för naturlig deduktion:

$$\Gamma \models q \iff \Gamma \vdash q,$$

där $\Gamma$ är en (ändlig eller oändlig) mängd sentenser, $q$ är en sentens, $\models$ betecknar logisk följd och $\vdash$ härledbarhet i naturlig deduktion.

Genom att tillämpa satsen med $\Delta$ för $\Gamma$ och $\curlywedge$ för $q$ får vi:

$$\Delta \models \curlywedge \iff \Delta \vdash \curlywedge,$$

dvs

$$\Delta \text{ saknar modell} \iff \Delta \text{ är inkonsistent}$$

eller, ekvivalent,

$$\Delta \text{ har en modell} \iff \Delta \text{ är konsistent}$$

*Bevis för kompakthetssatsen*: Antag att $\Delta$ saknar modell. Det betyder enligt ovan att $\Delta$ är inkonsistent, dvs att $\Delta \vdash \curlywedge$. Men varje härledning med naturlig deduktion har en ändlig längd, så bara en ändlig delmängd, $\Delta'$, av $\Delta$ används i härledningen. Det innebär att $\Delta' \vdash \curlywedge$, dvs (åter enligt ovan) att $\Delta'$ saknar modell. Så vi har visat att en sentensmängd som saknar modell har en ändlig delmängd som saknar modell.
Detta är ekvivalent med kompakthetssatsen. $\square$

**Två tillämpningar av kompakthetssatsen**:

## 1. Om sentensmängder med godtyckligt stora ändliga modeller

**Sats:**
Låt $\Gamma$ vara en (ändlig eller oändlig) sentensmängd som har godtyckligt stora ändliga modeller. Då har $\Gamma$ minst en oändlig modell.

Att $\Gamma$ har godtyckligt stora modeller betyder att för varje naturligt tal $n$ finns en modell för $\Gamma$ som har en domän med ett antal element som är ändligt och större än $n$. Vi skall alltså visa att $\Gamma$ då också har en oändlig modell (alltså en modell med en oändlig domän). ”Första ordningens predikatlogik kan inte skilja mellan ändligt och oändligt.”

*Bevis för satsen*: Låt $p_n$ vara en sentens som är sann precis i de tolkningar vars domän innehåller minst $n$ element. T.ex. kan $p_3$ väljas som

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\, y \neq z)$$

och för ett godtyckligt naturligt tal $n$ kan $p_n$ bildas på motsvarande sätt.

Låt nu $\Delta = \Gamma \cup \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Enligt förutsättningen om $\Gamma$ har då varje ändlig delmängd $\Delta'$ av $\Delta$ en modell (eftersom $\Delta'$ är ändlig innehåller den bara ett ändligt antal $p_n$, dvs en tillräckligt stor modell för $\Gamma$ är en modell för $\Delta'$). Kompakthetssatsen säger oss då att det finns en modell för $\Delta$, dvs en oändlig modell för $\Gamma$ (om alla $p_n$ är sanna måste domänen vara oändlig).
Satsen är alltså riktig. $\square$

## 2. Icke-standardmodeller för aritmetiken

Vi betraktar nu sentenser i **aritmetikens språk**, dvs det språk vi använde för att formulera Peanos axiom:
en individkonstant 0 [talet 0]
en 1-ställig funktionssymbol $S$ [nästa tal]
två 2-ställiga funktionssymboler $+$ och $*$ [addition och multiplikation]

**Standardtolkningen** av sentenser i detta språk har domän $\mathbb{N}$, de naturliga talen, och språkets symboler tolkade som inom [ ] ovan.

Låt $\mathcal{T}_{AR}$ vara teorin som består av alla sentenser i detta språk som är sanna i standardtolkningen, dvs alla sanna satser om de naturliga talen (som kan uttryckas i språket). Detta är en fullständig teori, varje sentens är ju sann eller falsk i standardtolkningen, så den eller dess negation ingår i $\mathcal{T}_{AR}$. Standardtolkningen är enligt definitionen en modell för $\mathcal{T}_{AR}$, kallad (förstås) **standardmodellen**.

Vi skall nu visa att det finns väsentligen andra (dvs icke-isomorfa med standardmodellen) modeller för $\mathcal{T}_{AR}$, så kallade **icke-standardmodeller**.

Utöka aritmetikens språk med ytterligare en individkonstant $c$ och låt $\Delta = \mathcal{T}_{AR} \cup \{c \neq 0, c \neq S(0), c \neq S(S(0)), c \neq S(S(S(0))), \dots\}$. Sentenserna med $c$ säger tillsammans (i standardtolkningen) att $c$ inte får tolkas som ett naturligt tal, så standardtolkningen kan inte utvidgas (genom att välja en tolkning för $c$) till en modell för $\Delta$. Men varje ändlig delmängd $\Delta'$ av $\Delta$ har en modell: standardmodellen för $\mathcal{T}_{AR}$, utökad med att den nya konstanten $c$ tolkas som ett tillräckligt stort tal ($\Delta'$ innehåller ju bara ändligt många $c$-sentenser, så det finns säkert ett ”ledigt” tal).

Enligt kompakthetssatsen har $\Delta$ en modell. Eftersom $\mathcal{T}_{AR}$ är en delmängd till

$\Delta$ är den tolkningen också en modell för $\mathcal{T}_{AR}$ (bortse bara från $c$). Dess domän innehåller ett element (det $c$ tolkades som) som inte kan nås från 0 genom att verka med $S$. Denna tolkning är alltså inte isomorf med standardmodellen.

Det kan tyckas förvånande att alla sentenser i $\mathcal{T}_{AR}$ kan vara sanna i en större domän. I $\mathcal{T}_{AR}$ ingår ju induktionsaxiomet $(\phi 0 \mathbin{\&} \forall x\,(\phi x \to \phi S(x))) \to \forall x\,\phi x$, så om $\phi x$ betyder "$x$ är ett vanligt naturligt tal", gäller ju $\phi 0$ och $\forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$, så vi bör kunna dra slutsatsen att $\forall x\,\phi x$ ingår i $\mathcal{T}_{AR}$. Alla element i domänen skulle då ändå vara vanliga naturliga tal!?
Problemet med invändningen är att det inte finns någon formel i det aktuella språket som uttrycker att $x$ är ett vanligt naturligt tal. De "nya" talen (icke-standardtalen) saknar namn i språket och har enligt konstruktionen alla sådana egenskaper för naturliga tal som kan uttryckas i aritmetikens språk, så det språket räcker inte för att skilja dem från standardtalen.

Man kan visa (se övning 5 nedan) att alla nya element i domänen är större än alla vanliga naturliga tal, vi har alltså en tolkning av aritmetikens språk som gör precis samma sentenser sanna som standardmodellen, men som innehåller "oändligt stora tal". Dessa modeller är exempel på att icke-isomorfa tolkningar kan göra precis samma sentenser sanna, dvs att icke-isomorfa tolkningar kan vara ekvivalenta.

## Övningar

**1.** Låt $p$ vara en sentens och $\Gamma$ en mängd av sentenser. Antag att $\{p\}$ och $\Gamma$ har precis samma modeller. Visa att det finns en ändlig delmängd $\Gamma'$ till $\Gamma$, sådan att $\{p\}$ och $\Gamma'$ har precis samma modeller. $p$ är alltså logiskt ekvivalent med konjunktionen av (de ändligt många) sentenserna i $\Gamma'$.
**2.** Låt åter $p$ vara en sentens och $\Gamma$ en mängd av sentenser. Antag att varje modell för $\{p\}$ satisfierar minst en sentens i $\Gamma$. Visa att det finns en ändlig delmängd $\Gamma'$ av $\Gamma$ sådan att varje modell för $\{p\}$ satisfierar minst en sentens i $\Gamma'$.
**3.** Låt $\Gamma$ och $\Delta$ vara sentensmängder sådana att varje tolkning är en modell för exakt en av $\Gamma$ och $\Delta$. Visa att det finns ändliga delmängder $\Gamma'$ till $\Gamma$ och $\Delta'$ till $\Delta$, sådana att $\Gamma'$ har samma modeller som $\Gamma$ och $\Delta'$ har samma modeller som $\Delta$.
**4.** Visa att sundhets- och fullständighetssatsen är ekvivalent med

$$\Delta \models \curlywedge \iff \Delta \vdash \curlywedge.$$

I texten visas och används att ovanstående följer ur sundhets- och fullständighetssatsen.
**5.** Undersök strukturen för icke-standardmodeller för $\mathcal{T}_{AR}$.
(Hur många icke-standardtal finns det?
Är de alla större än standardtalen?
Finns det ett minsta icke-standardtal?
Hur verkar efterföljarfunktionen på icke-standardtal?
Finns det icke-standardprimtal? [Ledning: För varje standardtal $n$ finns det ett primtal som är större än $n$.])
**6.** Visa att begreppet **välordning** inte kan uttryckas med första ordningens predikatlogik, dvs att det inte finns någon mängd av sentenser i första ordningens predikatlogik (med en tvåställig predikatsymbol $<$) som alla är sanna precis om tolkningen är en välordnad mängd.

**Svar till övningarna**

**1.** Om $\{p\}$ och $\Gamma$ har samma modeller, saknar $\Gamma \cup \{\sim p\}$ modeller. Enligt kompakthetssatsen finns då en ändlig delmängd $\Gamma'$ till $\Gamma$ så att $\Gamma' \cup \{\sim p\}$ saknar modeller. Det innebär att $\Gamma' \models p$, dvs varje modell för $\Gamma'$ är en modell för $\{p\}$. Men enligt förutsättning är varje modell för $\{p\}$ en modell för $\Gamma$ och därmed speciellt för delmängden $\Gamma'$. $\{p\}$ och $\Gamma'$ har alltså precis samma modeller. Om $\Gamma' = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gäller alltså $p \equiv q_1 \,\&\, q_2 \,\&\, \ldots \,\&\, q_n$ (att en tolkning är en modell för $\Gamma'$ är ju detsamma som att alla sentenser i $\Gamma'$ är sanna i tolkningen, dvs att konjunktionen av dem är sann i den).

**2.** Vi vet att varje modell för $\{p\}$ satisfierar minst en sentens i $\Gamma$. Låt $(\sim)\Gamma = \{\sim q \mid q \in \Gamma\}$. Då gäller att $\{p\} \cup (\sim)\Gamma$ saknar modeller. Enligt kompakthetssatsen finns alltså en ändlig delmängd $\Gamma'$ till $\Gamma$ sådan att $\{p\} \cup (\sim)\Gamma'$ saknar modeller. Det innebär att varje modell för $\{p\}$ satisfierar minst en sentens i $\Gamma'$, som önskat. Med $\Gamma' = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gäller alltså $\models p \to (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n)$.

**3.** Eftersom $\Gamma$ och $\Delta$ saknar gemensamma modeller, saknar $\Sigma = \Gamma \cup \Delta$ modeller. Enligt kopmpakthetssatsen har $\Sigma$ en ändlig delmängd $\Sigma'$ som saknar modeller. Om $\Gamma' = \Sigma' \cap \Gamma$ och $\Delta' = \Sigma' \cap \Delta$, är $\Gamma'$ och $\Delta'$ ändliga delmängder till $\Gamma$ respektive $\Delta$ och $\Gamma' \cup \Delta' = \Sigma'$, så $\Gamma'$ och $\Delta'$ saknar gemensamma modeller. Varje modell för $\Gamma$ är en modell för dess delmängd $\Gamma'$ och på samma sätt är varje modell för $\Delta$ en modell för $\Delta'$. Å andra sidan är varje modell för $\Gamma'$ en modell för $\Gamma$, ty om en tolkning inte är en modell för $\Gamma$ är den en modell för $\Delta$ (enligt förutsättning) och därmed för $\Delta'$, således inte för $\Gamma'$. $\Gamma'$ har alltså samma modeller som $\Gamma$ och på samma sätt ser man att $\Delta'$ har samma modeller som $\Delta$.

**4.** Förutsätt att $\Delta \models \curlywedge \Leftrightarrow \Delta \vdash \curlywedge$ för alla sentensmängder $\Delta$. Det återstår att visa att sundhets- och fullständighetssatsen följer ur detta.
Låt $\Gamma$ vara en sentensmängd och $q$ en sentens. Då gäller att
$\Gamma \models q \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\sim q\}$ saknar modeller $\Leftrightarrow \Gamma \cup \{\sim q\} \models \curlywedge \overset{\Delta = \Gamma \cup \{\sim q\} \text{ ovan}}{\Leftrightarrow}$ $\Gamma \cup \{\sim q\} \vdash \curlywedge$. Eftersom dessutom $\Gamma \cup \{\sim q\} \vdash \curlywedge \overset{\sim\text{I, DN}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash q$ och $\Gamma \cup \{\sim q\} \vdash \curlywedge \overset{\sim\text{E}}{\Leftarrow} \Gamma \vdash q$ är saken klar.

**5.** Låt icke-standardmodellen ha domän $\mathcal{D}$, individkonstanterna 0 och $c$ ha referenter $\circ, \gamma \in \mathcal{D}$ och $S, +, *$ representeras av funktionerna $\mathfrak{s}, \oplus, \otimes$. Låt också $a < b$ betyda $\exists x\, b = S(x) + a$, så vi kan använda symbolen $<$ i sentenser. I standardmodellen tolkas den som ”mindre än” (betecknad $<$). Vi kallar dess tolkning i icke-standardmodellen $\prec$.
Följande sentenser är då sanna i standardmodellen, ligger alltså i $\mathcal{T}_{AR}$ och är också sanna i icke-standardmodellen.
$\forall x \sim x < x$, $\forall x \forall y \forall z\, ((x < y \,\&\, y < z) \to x < z)$, $\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$ (dvs axiomen för en linjär ordning), så $\prec$ ger en linjär ordning på $\mathcal{D}$.
$\forall x\, (x = 0 \vee 0 < x)$, så $\circ$ är ett minsta element i $(\mathcal{D}, \prec)$.
$\forall x\, x < S(x)$, $\forall x \sim \exists y\, (x < y \,\&\, y < S(x))$, $\forall x\, (x \neq 0 \leftrightarrow \exists y\, x = S(y))$, så för varje $\alpha \in \mathcal{D}$ är $\mathfrak{s}(\alpha)$ en **närmaste efterföljare** till $\alpha$ och varje $\alpha \in \mathcal{D}$ utom $\circ$ har en **närmaste föregångare**, $\beta \in \mathcal{D}$ med $\alpha = \mathfrak{s}(\beta)$.
Elementen i $\mathcal{D}$ kan delas in i disjunkta **block**: två element i $\mathcal{D}$ ligger i samma block precis om det ena kan fås ur det andra genom att verka ett antal ($\geq 0$) gånger med $\mathfrak{s}$. Eftersom $\forall x \forall y\, (S(x) = S(y) \to x = y)$ definierar detta en ekvivalensrelation på $\mathcal{D}$ (tänk efter!). Blocken är motsvarande ekvivalensklasser.
Blocken består av kedjor av närmaste efterföljare, så för två olika block gäller att alla elementen i det ena är mindre än alla elementen i det andra, blocken

blir linjärt ordnade efter varandra. Det minsta blocket är **standardblocket**, som innehåller $\circ$. Alla icke-standardtal är alltså större än alla standardtal. Övriga block kallas **icke-standardblock**. Enligt konstruktionen är $c \neq \ldots S(S(0))\ldots$ sann i vår tolkning, så $\gamma$ ligger inte i standardblocket. Det betyder att det finns minst ett icke- standardblock.
Standardblocket är isomorft med $\mathbb{N}$, medan icke-standardblocken som ordnade mängder är isomorfa med $\zeta$ (dvs $(\mathbb{Z}, <)$). Därav följer att det inte finns något största eller minsta icke-standardtal och att det finns ett oändligt antal.
Med beteckningar som i ö <5, <6 i materialet K1 ger ovanstående att $(\mathcal{D}, \prec)$ som ordnad mängd är isomorf med $\omega + \zeta \times \lambda$, för en ordnad mängd $\lambda$ som beskriver ordningen mellan icke-standardblocken.
Det finns inget minsta icke-standardblock, ty om $\alpha \in \mathcal{D}$ är ett icke-standardtal finns ett $\beta \in \mathcal{D}$ med $\alpha = \beta \oplus \beta$ eller $\mathfrak{s}(\alpha) = \beta \oplus \beta$ (sentensen $\forall x\, \exists y\, (x = y + y \vee S(x) = y + y)$ tillhör ju $\mathcal{T}_{AR}$). Detta $\beta$ ligger inte i standardblocket (då skulle $\alpha$ också göra det) och inte i samma block som $\alpha$ (element i ett block skiljer sig med ett standardtal). Dessutom gäller $\beta \prec \alpha$, så $\beta$:s block är ett icke-standardblock som är mindre än $\alpha$:s. $\lambda$ har alltså inget minsta element.
På motsvarande sätt ser man att $\lambda$ saknar största element (betrakta blocket med $\alpha \oplus \alpha$).
Mellan två olika block finns alltid ett tredje, ty om $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ finns $\delta \in \mathcal{D}$ med $\delta \oplus \delta = \alpha \oplus \beta$ eller $\delta \oplus \delta = \mathfrak{s}(\alpha \oplus \beta)$ (motsvarande gäller ju i $\mathbb{N}$ och kan uttryckas som en sentens) och man visar att om $\alpha, \beta$ ligger i olika block så ligger $\delta$ i ett block mellan dem. $\lambda$ är alltså en **tät** ordnad mängd.
Många begrepp för naturliga tal kan direkt överföras till icke-standardmodeller. T.ex. kan vi låta $Px$ betyda $x \neq 0$ & $x \neq 1$ & $\forall y \forall z\, (x = y * z \rightarrow (y = S(0) \vee z = S(0)))$. I standardmodellen betyder $Px$ att $x$ är ett primtal. Vi låter $P$ definiera primtal även i icke-standardmodeller. $\forall x\, \exists y\, (x < y \;\&\; Py)$ ligger i $\mathcal{T}_{AR}$, så det finns godtyckligt stora icke-standardprimtal.
Man kan visa att om elementen i $\mathcal{D}$ inte är "för många" (om de är uppräkneliga), är $(\mathcal{D}, \prec)$ isomorf med $\omega + \zeta \times \eta$. Däremot finns det ingen enkel beskrivning av hur $\oplus, \otimes$ verkar i $\mathcal{D}$ (utom i standardblocket förstås).
**6.** Standardmodellen $\omega$ (dvs $(\mathbb{N}, <)$) för $\mathcal{T}_{AR}$ är välordnad, men det är inte icke-standardmodellerna i ö 5 (icke-standardblocken saknar minsta element). En sentensmängd som uttrycker välordningsegenskapen och som bara innehåller symbolen $<$ (utöver logiska symboler) är ekvivalent med en mïgd $\Gamma_{vo}$ av sentenser i aritmetikens språk (med hjälp av $\exists x\, b = S(x) + a$ för $a < b$). Eftersom alla sentenser i $\Gamma_{vo}$ är sanna i standardmodellen skulle de ingå i $\mathcal{T}_{AR}$, men de skulle inte alla vara sanna för icke-standardmodellerna. Motsägelse.