Problemlösningstest 2 i kursen 5B1928 Logik för IT3, måndag 9 okt 2006

Skrivning 13.15–14.00, därefter rättning i grupp fram till 15.00.

Skrivningsnummer:

Skriv inte ditt namn här, utan på bifogat formulär.

Skriv lösningarna på detta papper. Inga hjälpmedel är tillåtna. För godkänt krävs väsentligt korrekta lösningar på minst två uppgifter samt att man rättat någon annans skrivning.

1. Hitta en tolkning som visar att

$$\exists x(Px \to Qx), \forall x(Px \vee Qx) \not\models \forall x(Px \to Qx).$$

Förklara också varför din tolkning visar påståendet.

Tolkningen

	P	Q
α	+	–
β	–	+

gör premisserna sanna men slutsatsen falsk.

Till att börja med, eftersom $Pb \to Qb$ är sant i denna tolkning så är premissen $\exists x(Px \to Qx)$ sann i denna tolkning.

Vidare är både $Pa \vee Qa$ och $Pb \vee Qb$ sann. Alltså är premissen $\forall x(Px \vee Qx)$ sann.

Till sist ser vi att $Pa \to Qa$ är falskt och därmed att slutsatsen $\forall x(Px \to Qx)$ är falsk.

En alternativ lösning är:

	P	Q
α	+	–
β	+	+

(med samma motivering)

2. Visa med naturlig deduktion att

$$\forall x(Px \to \sim Qx) \vdash \exists x Px \to \sim\forall y Qy.$$

1	(1)	$\forall x(Px \to \sim Qx)$	premiss
2	(2)	$\exists x Px$	antagande
3	(3)	$\forall y Qy$	antagande
4	(4)	Pa	antagande
1	(5)	$Pa \to \sim Qa$	1 ∀E
1,4	(6)	$\sim Qa$	5,4 →E
3	(7)	Qa	3 ∀E
1,3,4	(8)	$\curlywedge$	6,7 ~E
1,2,3	(9)	$\curlywedge$	2,4,8 ∃E (a ej på rad 2,8,1,3)
1,2	(10)	$\sim\forall y Qy$	3,9 ~I
1	(11)	$\exists x Px \to \sim\forall y Qy$	2,10 →I

3. Avgör med tablåmetoden om

$$\exists x Fx, \forall x(Fx \to \exists y Gy) \models \exists x Gx$$

gäller. Om det inte gäller, ta fram en tolkning som visar detta.

$\mathbb{T}: \exists x Fx \ \checkmark (1, a)$

$\mathbb{T}: \forall x(Fx \to \exists y Gy) \ (2, a) \ (6, b)$

$\mathbb{F}: \exists x Gx \ (3, a) \ (7, b)$

1: $\mathbb{T}: Fa$

2: $\mathbb{T}: Fa \to \exists y Gy \ \checkmark 4$

3: $\mathbb{F}: Ga$

4: $\mathbb{F}: Fa$	4: $\mathbb{T}: \exists y Gy \ \checkmark (5, b)$
$\times$	5: $\mathbb{T}: Gb$
	6: $\mathbb{T}: Fb \to \exists y Gy$
	7: $\mathbb{F}: Gb$
	$\times$

Eftersom tablån sluter sig så gäller påståendet $\exists x Fx, \forall x(Fx \to \exists y Gy) \models \exists x Gx$.