Problemlösningstest 3 i kursen 5B1928 Logik för IT3, måndag 6 nov 2006

Skrivning 8.15–9.15, därefter rättning i grupp fram till 10.00.

Skrivningsnummer:

Skriv inte ditt namn här, utan på bifogat formulär.

Skriv lösningarna på detta papper. Inga hjälpmedel är tillåtna. För godkänt krävs väsentligt korrekta lösningar på minst två uppgifter samt att man rättat någon annans skrivning.

1. Översätt följande till en predikatlogik sentens:

   För att alla barn ska ha en kompis är det nödvändigt att det finns minst två barn.

   Använd följande lexikon:

   $$B\_ : \_ \text{ är barn}$$
   $$K\_,\_ : \_ \text{ är kompis med } \_.$$

Alla barn har en kompis: $\forall x(Bx \to \exists y\, Bxy)$

Det finns minst två barn: $\exists x \exists y(x \neq y \,\&\, Bx \,\&\, By)$

För att A är det nödvändigt att B (dvs B är ett nödv. villkor för A): $A \to B$

Översättningen blir:

$$\forall x(Bx \to \exists y Bxy) \to \exists x \exists y(x \neq y \,\&\, Bx \,\&\, By).$$

2. Avgör om följande gäller:

   $$\forall x \forall y\,(x = y \vee (Rxy \to Ryy))\,,\, R \text{ är inte reflexiv} \models \sim\forall y \exists x Rxy.$$

   Om det gäller, gör en härledning av det med naturlig deduktion. Om det inte gäller, hitta en tolkning som visar detta.

Detta gäller och vi visar det med naturlig deduktion:

1	(1)	$\forall x \forall y(x=y \vee (Rxy \to Ryy))$	premiss
2	(2)	$\sim\forall x Rxx$	premiss
3	(3)	$\forall y \exists x Rxy$	antagande
3	(4)	$\exists x Rxa$	3 $\forall$E
5	(5)	Rba	antagande
1	(6)	$\forall y(b=y \vee (Rby \to Ryy))$	1 $\forall$E
1	(7)	$b=a \vee (Rba \to Raa)$	6 $\forall$E
8	(8)	$b=a$	antagande
5,8	(9)	Raa	8,5 =E
10	(10)	$Rba \to Raa$	antagande
5,10	(11)	Raa	10,5 $\to$E
1,5	(12)	Raa	7,8,9,10,11 $\vee$E
1,3	(13)	Raa	4,5,12 $\exists$E (b ej på rad 4,12,1)
1,3	(14)	$\forall x Rxx$	13 $\forall$I (a ej på rad 1,3)
1,2,3	(15)	$\curlywedge$	2,14 $\sim$E
1,2	(16)	$\sim\forall y \exists x Rxy$	3,15 $\sim$I

3. Avgör om följande gäller:

$$R \text{ är inte reflexiv}, \forall x \exists y \exists z (y \neq z \;\&\; Rxy \;\&\; Rxz) \vDash R \text{ är symmetrisk.}$$

Om det gäller, gör en härledning av det med naturlig deduktion. Om det inte gäller, hitta en tolkning som visar detta.

Vi tolkar relationen grafiskt.

Första premissen säger: det är inte så att varje punkt har en pil till sig själv

Andra premissen säger: Från varje punkt går minst två pilar.

Slutsatsen säger: För varje pil mellan två punkter går en tillbaka.

Följande graf uppfyller premisserna men inte slutsatsen:

Alltså gör tolkningen

$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$Ext(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$

premisserna sanna men slutsatsen falsk.

Alltså gäller påståendet <u>inte</u>.