KTH Matematik
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D (och IT)
Måndagen den 29 augusti 2005

Skrivtid: 8.00 – 13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2005 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) På Knarrön (där ju var och en är precis endera av kung (och alltid talar sanning) och narr (och alltid ljuger)) träffar vi de tre öborna A, B och C.
A säger: ”Vi tre är alla samma sort (alla kungar eller alla narrar).”
B säger: ”A är kung.” C säger: ”A och B är inte båda kungar.”
Vad kan man säkert säga om A:s, B:s och C:s grupptillhörigheter?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$A \leftrightarrow {\sim}B \ \vdash {\sim}A \leftrightarrow B.$$

3) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx),\ \exists x \sim(Fx \,\&\, Gx)\ \vDash\ \sim\exists x\, Fx.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\forall x\ \sim(Fx \,\&\, Gx),\ \exists x\, Gx\ \vdash {\sim}\forall x\, Fx.$$

5) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Alla tycker om minst två stycken och ingen kung tycker om sig själv.”
2. ”Varje kung tycker om alla narrar som tycker om minst en kung.”
Använd följande lexikon. Kx : ”Ref(x) är kung”, Nx : ”Ref(x) är narr”, Txy : ”Ref(x) tycker om Ref(y)”.

6) Finn en tolkning med så liten domän som möjligt som satisfierar:

$$\{\exists x\,\exists y\, Rxy,\ \forall x\,\forall y\,(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx)),\ \exists x\,\forall y \sim Rxy,\ \forall x \sim Rxx,\ \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \exists z\,(y \neq z \,\&\, Rxz))\}.$$

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\,\forall y\,((Fx \,\&\, {\sim}Fy) \rightarrow x = y)\ \vdash\ \forall x\, Fx \vee \forall x \sim Fx.$$

Vänd!

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{R}$, tolkningen av) R ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\;\&\;Rzy)\rightarrow Rzx)\;\&\;\forall x\,\exists y\,Rxy$$

sann? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p, q och r:

$$\alpha)\;\; p\vDash r \text{ eller } q\vDash r \text{ (eller båda)} \qquad \beta)\;\; p\vee q\;\vDash\; r.$$

α) säger alltså att r är en logisk följd av minst en av p och q, medan β) säger att r är en logisk följd av $p\vee q$.
Gäller $\alpha) \;\Rightarrow\; \beta)$? (Dvs gäller för alla sentenser p,q,r att om α är sann så är också β sann?) Gäller $\beta) \;\Rightarrow\; \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x*y)*z = x*(y*z)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Utan bevis får användas att $\forall x\,\forall y\,\forall z\;\; x*(y+z) = x*y + x*z$
(dvs $(x*y)+(x*z)$) följer ur Peanos axiom.
[Ledning: Visa först $\forall z\,(a*b)*z = a*(b*z)$ för vilka a, b som helst.]

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Box\,(A\rightarrow B),\; \Box B\rightarrow{\sim}A\;\;\vdash_{S5}\;\;\Diamond{\sim}A.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\forall x\,\Box\,Fx,\;\Box\,\exists x\,(Fx\rightarrow Gx),\;\Diamond\,\forall x\,Gx,\;\exists x\,{\sim}\,Gx\;\;\nvDash_{S5}\;\;\Box\,\exists x\,Gx$$

13) Gäller det i intuitionistisk logik att

$${\sim}{\sim}(A\;\&\;B)\;\;\vDash_I\;{\sim}{\sim}A\;\&\;{\sim}{\sim}B?$$

Motivera ditt svar ordentligt.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$${\sim}\forall x\,(Fx\rightarrow Gx)\;\;\nvDash_I\;\;\exists x\;{\sim}Gx.$$

15) Låt Γ och Δ vara sentensmängder i första ordningens predikatlogik, så att varje modell för Γ satisfierar minst en sentens i Δ. Visa att det finns ändliga $\Gamma'\subseteq\Gamma$ och $\Delta'\subseteq\Delta$, så att varje modell för Γ' satisfierar minst en sentens i Δ'.

16) För vilka tolkningar med ändlig domän är följande sentens i andra ordningens predikatlogik sann? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\exists u\,\forall x\,((Px\leftrightarrow{\sim}(Pu(x)\vee Pu(u(x))))\;\&\;x = u(u(u(x))))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.