KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D (och IT)
onsdagen den 29 augusti 2007

Skrivtid: 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Den som har 11 eller 12 poäng på del A har rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg 3.
Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Kontrollskrivningar från en av höstterminen 2006 och vårterminen 2007 kan tillgodoräknas. Den som klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng vardera på uppgifterna nr $2i-1$ och $2i$ (och skall inte göra dem). Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) På Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) träffar vi öborna A, B och C.
A säger: ”Om C är kung är vi alla det.”
B säger: ”A och C är olika sorter.”
För vilken eller vilka av A, B och C kan vi vara säkra på sorten? Vad kan sägas om övrigas sort(er)? (Med ”sort” avses här förstås kung eller narr.)

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$(A \,\&\, B) \to (C \to D), \sim D \;\vdash\; (A \,\&\, C) \to \sim B.$$

3) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\,(Fx \vee Gx) \,\&\, \exists y\, Fy \;\models\; \forall x\, Fx \vee \exists y\, Gy.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\exists x \sim Fx \vee \forall y\, Gy \;\vdash\; \forall x\, \exists y\, (Fy \to Gx).$$

5) Översätt 1. och 2. till predikatlogiska sentenser:
1. ”Varje hund tycker om (minst) en katt som tycker om alla hundar.”
2. ”Pluto är den enda hunden som tycker om alla katter.”
Använd följande lexikon: Hx : ”Ref(x) är hund”, Kx : ”Ref(x) är katt”, Txy : ”Ref(x) tycker om Ref(y)”, Pluto är Ref(p).

6) Visa att

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z \,\&\, (Pxy \,\&\, Pxz)) \;\not\models\; \exists x\, \exists y\, \exists z\, ((Pxy \,\&\, Pyz) \,\&\, Pxz).$$

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, \forall y\, ((Rxy \,\&\, (Fx \,\&\, Fy)) \to x = y),\ \exists x\, \exists y\, Rxy \;\vdash\; \exists x\, (Fx \to Rxx).$$

Vänd!

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{R}$, tolkningen av) R ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\, \exists y\, Rxy \text{ och } \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rxz)$$

sanna? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p och q:

α) För något r gäller $p \vDash r$ och $q \vDash \sim r$ $\qquad \beta$) $p \nvDash q$.

α) säger alltså att någon sentens r är en logisk följd av p och dess negation $\sim r$ en av q, medan β) säger att q inte är en logisk följd av p.
Gäller $\alpha) \Rightarrow \beta)$? (Dvs gäller för **alla** sentenser p, q att om α) är sann så är också β) sann?) Gäller $\beta) \Rightarrow \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det ur $f(0) = 0$, $\forall x\, (f(S(x)) = f(x) \vee f(S(x)) = S(f(x)))$ och Peanos axiom (med funktionssymbolen f i språket förstås) följer att

$$\forall x\, \exists y\, f(x) + y = x \qquad (\text{dvs } \forall x\, f(x) \leq x).$$

Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Utan bevis får användas att $\forall x\, \forall y\, S(x) + y = S(x + y)$ följer ur Peanos axiom.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) i varianten S5 av modallogik (den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$A \,\&\, \Diamond \sim B,\ \Box\,(A \rightarrow B)\ \vdash_{S5} \sim(\Diamond A \rightarrow \Box\, A).$$

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\, \forall x\, \Diamond\, \exists y\, Qxy\ \nvDash_{S5}\ \Box\, \forall x\, \exists y\, \Diamond\, Qxy.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \rightarrow (\sim B \vee \sim C)\ \vDash_I\ C \rightarrow (B \rightarrow \sim A).$$

Sambandet skall visas med resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\sim \forall x\, (Fx \rightarrow Gx)\ \nvDash_I\ \exists x \sim Gx.$$

15) Låt Γ, Δ vara sentensmängder (i första ordningens predikatlogik), så att för varje tolkning finns $p \in \Gamma, q \in \Delta$ med samma sanningsvärde i tolkningen. Visa att det finns **ändliga** $\Gamma' \subseteq \Gamma, \Delta' \subseteq \Delta$ med samma egenskap.

16) Betrakta följande sentens i andra ordningens predikatlogik,

$$\forall X\, \exists u (\forall x\, u(x) \neq x \,\&\, \forall x\, \forall y\, (Xxu(y) \leftrightarrow Xu(x)y)).$$

Är den en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.